

مقدمة في:

بثوث العمليات

(الطرق الكمية في الإدارة)

أ.د. إبراهيم محمد مهدي

أستاذ الرياضيات والإحصاء الإكتواري
وعميد كلية التجارة (سابقاً)

قسم الإحصاء والتأمين
كلية التجارة - جامعة المنصورة

اتعام الجامعي ٢٠٠٦/٢٠٠٧م

الناشر : مكتبة الجلاء الجديدة بالمنصورة

ت: ٥٠٢٢٤٧٣٦٠

3

مقدمة

تعتبر بحوث العمليات من أهم الدعائم الأساسية التي تركز وتعتمد عليها شتى المنشآت لحل المشاكل المعقدة والوصول إلى أمثل الحلول الممكنة ، حيث أن بحوث العمليات لا تقتصر على فرع علمي واحد ، لكن تعتمد على فروع متعددة من العلوم في إطار نظام معين ، كما وأنها تعتمد على الحاسبات الإلكترونية في حل العمليات الحسابية المعقدة.

والهدف من هذا المرجع عرض بعض نماذج بحوث العمليات والتي يمكن استخدامها في مجالات الإدارة والمحاسبة والإقتصاد وغير ذلك . وانطلاقاً مما تقدم ، ولتحقيق الغاية من هذا المرجع قمت بعرض بعض نماذج بحوث العمليات التي تستخدم في المجالات الإدارية والمحاسبية على النحو التالي :

الفصل الأول : نموذج المحاكاة .

الفصل الثاني : الإحلال والتجديد .

الفصل الثالث : تحليل نقطة التعادل .

الفصل الرابع : نظرية اتخاذ القرارات .

الفصل الخامس : نظرية المباريات .

الفصل السادس : نماذج التخصيص .

الفصل السابع : نظرية صفوف الإنتظار .

الفصل الثامن : تحليل سلاسل ماركوف .

الفصل التاسع : طريقة النقل .

وقد اعتمدت في ذلك على أحدث المراجع العربية والأجنبية ، وأرجو أن أكون قدمت إنتاجاً متواضعاً لخدمة أبنائي الطلاب بكلية التجارة جامعة المنصورة .

والله ولي التوفيق ،،،،،

أ.د. ابراهيم محمد مهدي

يوليو ٢٠٠٦م

٥	الفصل الأول : نموذج المحاكاة .
٣٩	الفصل الثاني : الإحلال والتجديد .
٥٩	الفصل الثالث : تحليل نقطة التعادل .
٨٣	الفصل الرابع : نظرية اتخاذ القرارات .
١٠١	الفصل الخامس : نظرية المباريات .
١٢٣	الفصل السادس : نماذج التخصيص .
١٥١	الفصل السابع : نظرية صفوف الإنتظار .
١٨١	الفصل الثامن : تحليل سلاسل ماركوف .
٢٢٣	الفصل التاسع : طريقة النقل .
٢٥٤	المـراجـع .

الفصل الأول

نموذج المحاكاة

Simulation Models

المحاكاة هو أسلوب كمي يتميز أنه من أكثر الأساليب الكمية مرونة ، والمحاكاة هو محاولة كشف الملامح ، والمظاهر والصفات لنظام حقيقي واقعي وتلعب المحاكاة دوراً كبيراً في حياتنا المعاصرة . ويتمثل ذلك في المجالات التالية :

(١) محاكاة المشاكل الصناعية (رقابة المخزون ، تصميم نظم التوزيع ، جدولة الصيانة ، تصميم نظم الإنتظار ، جدولة أعمال البركة ، تصميم نظم الإتصال)

(٢) محاكاة مشاكل الأعمال والإقتصاد (عمليات الشركة ككل ، سلوك المستهلك ، تصميم المشروعات الإستثمارية ، تحديد الأسعار ، عمليات السوق ، دراسة الإقتصاد القومي في ظل مشاكل الكساد والتضخم ، وضع خطط وسياسات ميزان المدفوعات في اقتصاديات الدول النامية ، التنبؤ الإقتصادي)

(٣) المشاكل السلوكية والإجتماعية (الحراك السكاني ، سلوك الفرد والجماعة)

(٤) محاكاة استراتيجيات وتكتيكات الحروب

ولكي يمكن استخدام أسلوب المحاكاة ، يجب اتباع الخطوات التالية :

(١) تحديد وتعريف المشكلة .

(٢) تحديد المتغيرات والعوامل الهامة .

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

- (٣) عمل نموذج المحاكاة .
- (٤) تحديد قيم المتغير التي تم اختيارها .
- (٥) القيام بإجراء المحاكاة .
- (٦) اختبار النتائج .
- (٧) اختيار أحسن طريقة للعمل (اختيار التصرف الأمثل) .

مزايا وعيوب المحاكاة :

بعض مزايا المحاكاة :

- (١) هو أسلوب يتصف بأنه مباشر ومرن .
- (٢) تُستخدم المحاكاة لتحليل الحالات المعقدة والتي يصعب حلها باستخدام النماذج الرياضية .
- (٣) يمكن من خلال المحاكاة استخدام أي توزيعات احتمالية وليس من الضروري الإقتصار على توزيعات محددة .
- (٤) اختصار الوقت ، وخاصة عند استخدام الحواسيب الآلية .

بعض عيوب المحاكاة :

- (١) تتطلب نماذج المحاكاة الجيدة تكاليف مرتفعة ، وقد تستغرق سنوات لتصميمها وبنائها .
- (٢) لا تقدم المحاكاة حلاً مثلى لمشاكل ، إذ أنها أسلوب يقوم على التجربة والخطأ ، ومن ثم يتولد عن المحاكاة حلولاً عدة من كل محاولة .
- (٣) يمثل كل نموذج للمحاكاة أسلوباً منفرداً ، ومن ثم لا يمكن تحويل الحلول والإستنتاجات من نموذج يُصمم لمشكلة معينة إلى مشكلة أخرى .

المحاكاة باستخدام أسلوب (مونت كارلو) :

عندما يتضمن النظام عناصر واضحة لها فرضية للتأثير في سلوك النظام ، في هذه الحالة ، فإنه يمكن تطبيق أسلوب (مونت كارلو) ، وهو أسلوب احتمالي يقوم على تجربة الفرص المحتملة من خلال عينات عشوائية .

ويمكن تقسيم هذا الأسلوب إلى خمس خطوات بسيطة :

(١) عمل توزيع احتمالي للمتغيرات الهامة في النظام .

(٢) إعداد توزيع احتمالي متجمع .

(٣) تحديد مدى من الأرقام العشوائية لكل متغير .

(٤) توليد الأرقام العشوائية .

(٥) القيام بالمحاكاة لسلسلة من المحاولات .

إستخدام المحاكاة في تقدير حجم المبيعات لفترة زمنية قادمة

مثال (١)

بفرض أن أحد وكلاء إحدى شركات السلع المعمرة (الثلاجات) يريد أن يقدر حجم المبيعات خلال فترة زمنية قادمة ، ولتكن سنة قادمة ، باستخدام نظام المحاكاة ، ولتحقيق هذا الغرض أمكن الحصول على أرقام المبيعات خلال السنة الماضية للعمل (٣٠٠ يوم عمل) ، كما أمكن تلخيص هذه المبيعات في الجدول التالي :

عدد الثلاجات المباعة (س)	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الأيام (التكرار) (ك)	٣٠	٦٠	٦٠	٩٠	١٥	٤٥

والمطلوب تقدير المبيعات خلال (١٠) عشرة أيام قادمة ؟ .

ملحوظة : يمكنك إستخدام الأرقام العشوائية التالية المستخرجة من جدول

الأرقام العشوائية : ٠٧ ، ٦٠ ، ٧٧ ، ٤٩ ، ٧٦ ، ٩٥ ، ٥١ ، ١٦ ، ١٤ ، ٨٥

(١) نموذج المحاكاة

بحوث العمليات

الحل :

لحل هذا المثال نطبق الخطوات التالية :

(١) تحويل جدول التوزيع التكراري إلى توزيع احتمالي وذلك بقسمة كل تكرار ÷ مجموع التكرارات (٣٠٠) ، فتكون على الترتيب :

$$\begin{array}{lll} 0,20 = \frac{60}{300} & 0,20 = \frac{60}{300} & 0,10 = \frac{30}{300} \\ 0,15 = \frac{45}{300} & 0,05 = \frac{15}{300} & 0,30 = \frac{90}{300} \end{array}$$

(٢) إيجاد الاحتمال المتجمع الصاعد بتجميع الاحتمالات السابقة (التي تسبق النقطة موضع التجميع)

(٣) تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الاحتمال المتجمع

ويمكن تكوين الجدول التالي :

عدد التلجات (س) المباعه	عدد الأيام (ك) التكرار	الاحتمال (ح)	الاحتمال المتجمع	الأرقام العشوائية المستخرجه (المنتجة)
صفر	٣٠	٠,١٠	٠,١٠	من ٠٠ : ٠٩
١	٦٠	٠,٢٠	٠,٣٠	من ١٠ : ٢٩
٢	٦٠	٠,٢٠	٠,٥٠	من ٣٠ : ٤٩
٣	٩٠	٠,٣٠	٠,٨٠	من ٥٠ : ٧٩
٤	١٥	٠,٠٥	٠,٨٥	من ٨٠ : ٨٤
٥	٤٥	٠,١٥	١,٠٠	من ٨٥ : ٩٩
المجموع	٣٠٠	١,٠٠		

(٤) بعد تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع من الجدول السابق ، يتم ترجمة الأرقام العشوائية المستخرجة حسب كل رقم يقع في أي فئة في عمود الأرقام العشوائية المخصصة :

فمثلاً : ٠٧ يقع في الفئة [٠٠ : ٠٩] والتي يقابلها صفر ثلاثة مباعه

٦. يقع في الفئة [٥٠ : ٧٩] والتي يقابلها ٣ ثلجات مباعه

٧٧ يقع في الفئة [٥٠ : ٧٩] والتي يقابلها ٣ ثلجات مباعه

٤٩ يقع في الفنة [٣٠ : ٤٩] والتي يقابلها ٢ ثلاثة مباحة

وهكذا : . . .

وعلى ذلك يمكن تصوير الجدول التالي :

الأرقام العشوائية المستخرجة	عدد التلجالات المباعة
٠٧	صفر
٦٠	٣
٧٧	٣
٤٩	٢
٧٦	٣
٩٥	٥
٥١	٣
١٦	١
١٤	١
٨٥	٥
المجموع	٢٦

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

وعلى ذلك يكون متوسط عدد الثلجات المباعة عن العشرة أيام القادمة من واقع نظام المحاكاة هو :

$$= \frac{26}{10} = 2,6 \text{ ثلاجة .}$$

ونلاحظ أنه كلما زاد عدد أيام المحاكاة (عدد مفردات العينة) كلما قربت القيم المتوقعة من القيم الفعلية ، والقيم المتوقعة هنا هي عبارة عن مجموع حواصل ضرب كل رقم (عدد الثلجات) \times الإحتمال الخاص به

$$\begin{aligned} \text{القيمة المتوقعة} &= (\text{صفر} \times 0,10) + (1 \times 0,20) + (2 \times 0,20) \\ &+ (3 \times 0,30) + (4 \times 0,05) + (5 \times 0,15) \\ &= \text{صفر} + 0,2 + 0,4 + 0,9 + 0,2 + 0,75 = 2,45 \text{ ثلاجة} \end{aligned}$$

وكما سبق أن أوضحنا ، فإنه كلما زاد عدد أيام المحاكاة كلما إقترب الرقمان السابقان من بعضهما .

مثال (٢)

فيما يلي متوسط وقت أداء الخدمة بإحدى الورش لإصلاح السيارات والإحتمالات الخاصة بها :

متوسط الزمن بالدقائق	الإحتمال
١٥	٠,٢٠
٣٠	٠,٤٠
٦٠	٠,٣٠
١٢٠	٠,١٠

المطلوب إجراء المحاكاة بالنسبة لعشرة حالات لإصلاح السيارات ، بفرض أن الأرقام العشوائية المستخرجة هي :

٧٨ ، ٢٨ ، ٠٨ ، ٠٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

(١) نموذج المحاكاة

بحوث العمليات

الحل :

يتم تكوين الجدول التالي :

متوسط الزمن بالدقائق	الإحتمال (ح)	الإحتمال المتجمع	الأرقام العشوائية
١٥	٠,٢٠	٠,٢٠	من ٠٩ : ٠٠
٣٠	٠,٤٠	٠,٦٠	من ٥٩ : ٢٠
٦٠	٠,٣٠	٠,٩٠	من ٨٩ : ٦٠
١٢٠	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٩ : ٩٠

بعد تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المتجمع من الجدول السابق ، يتم ترجمة الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة) حسب كل رقم يقع في أي فئة في عمود الأرقام العشوائية المخصصة وتحديد الزمن المقابل كما يلي :

الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة)	الزمن بالدقائق
٧٨	٦٠
٢٨	٣٠
٠٨	١٥
٠٢	١٥
٢٣	٣٠
٥٤	٣٠
٥٧	٣٠
٠٠	١٥
٨٤	٦٠
٩٥	١٢٠

وعلى ذلك يكون متوسط الزمن بالدقائق عن العشرة حالات من إصلاح السيارات من واقع نظام المحاكاة هو :

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

$$\frac{120 + 60 + 15 + 30 + 30 + 30 + 15 + 15 + 30 + 60}{10} =$$

$$= \frac{405}{10} = 40.5 \text{ دقيقة} .$$

∴ القيمة المتوقعة

$$= (0.1 \times 120) + (0.3 \times 60) + (0.4 \times 30) + (0.2 \times 15)$$

$$∴ \text{القيمة المتوقعة} = 12 + 18 + 12 + 3 = 45 \text{ دقيقة} .$$

إستخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون السلعي :

إن التخطيط الجيد لإحتياجات المشروع من الأصناف المخزونه يمثل أمراً بالغ الأهمية ، حيث أن زيادة حجم المخزون عن الحاجة تعنى تقييد جانب من الأموال من الممكن إستثمارها في مجالات أخرى ، وبالمثل فإن نقص المخزون عن الحاجة يترتب عليه ضياع فرص الحصول على الأرباح .

وتهدف الرقابة على المخزون إلى تصميم الطرق والوسائل التي تكفل التحقق من أن تصرفات الإدارة في الحصول على المواد الخام المستخدمة في عملية التحول والتشغيل إلى منتجات تامة تتم وفقاً لخطه مستهدفه ، وينبغي الإنتفاع بموارد المشروع لأقصى حد ممكن وبما يضمن إستمرار عملية الإنتاج ويمثل الهدف الرقابي بالمشروعات الإنتاجية في الآتي : -

(١) تحديد الإستثمار في المخزون من المواد في أدنى مستوى له ...
تجنباً لرأس المال المجدد دون استثمار وضياع فرص إستثماريه أخرى
ناتجة عن إستخدامه بما يدر عوائد مجزية للمشروع .

(٢) تحديد الإستثمار في المخزون من المواد بالقدر الكافي الذي يحافظ على استمرار تدفق المواد لتغذية الخطوط الإنتاجية باحتياجاتها في الوقت المناسب وبالجوده المناسبه حتى لا يتعطل دولا ب الإنتاج .

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

وقد يبدو لأول وهلة وجود تعارض بين الهدفين المذكورين ، فالمحافظة على عدم توقف الإنتاج يتطلب زيادة المخزون وتجميد رأس المال ، والرغبة في تخفيض تكلفة رأس المال المستثمر يتطلب تخفيض المخزون إلى أدنى مستوى له .

وهذا يتطلب من الإدارة الناجحة أن توازن بين تكاليف التخزين في حالة الاحتفاظ بمخزون أكبر من اللازم ، وبين التكاليف التي يتحملها المشروع نتيجة إذا كان المخزون أقل من اللازم ، ومن ثم تعرض الإنتاج للتوقف نتيجة لذلك .

وبناءً على ما تقدم يتضح أهمية الاستعانة بالأساليب الكمية في تطوير الرقابة على المخزون السلعي ، ويجب أن نعلم أن لفظ المخزون يشير إلى الكميات التي يحتفظ بها المشروع من الأصناف المختلفة ، وذلك بهدف استخدامها في المستقبل أو عند الحاجة إليها (مواد خام ، مواد نصف مصنعة ، بضاعة تحت التشغيل ، منتجات تامة الصنع ومعدة للبيع ، أدوات ومهمات ، ... إلخ) .

وتستخدم الأساليب الكمية في تطوير أهداف الرقابي من خلال الموضوعات التالية : -

- (١) كيفية تحديد الكمية الإقتصادية للطلب .
 - (٢) علاقة الكمية الإقتصادية للطلب بتحديد مستويات المخزون .
 - (٣) علاقة الكمية الإقتصادية بخصم الكمية .
 - (٤) تحديد الحد الأدنى لمخزون الأمان الأمثل والذي يحقق أدنى تكلفة ممكنة .
- ونتناول فيما يلي هذه الموضوعات بالتحليل والدراسة من الناحية الكمية بشئ من التفصيل .

تحديد الكمية الاقتصادية للطلب :

قد يجابه مدير المشتريات بجمعية إختيار سياسة شرائيه معينه من بين السياسات الشرائيه البديله المتاحه . فقد يتبع سياسة شراء الطلب السنوى (إحتياجات المشروع السنويه) دفعه واحده ، أو يتبع سياسة شراء الإحتياجات على عدة دفعات خلال السنه الواحده .

ويوجد الكثير من المتغيرات التى تحكم عملية إختيار سياسه شرائيه دون إخرى ، فإختيار السياسه الأولى (الدفعه الواحده) قد يحكمها مدى توافر التمويل اللازم ومقدار الخصم النقدى وخصم الكمية التى يحصل عليه المشروع كما يحكم إختيار السياسه الثانيه (دفعات خلال السنه الواحده) صعوبة توفير التمويل اللازم دفعه واحده ، وبالتالى ضياع فرصة حصول المشروع على الخصم اللازم .

ويرى البعض أن تحديد أفضل كمية إقتصادية للطلب تكون عند تعادل تكاليف التخزين مع تكاليف عدد أوامر الشراء المصدرة خلال العام (تكاليف إصدار الطلبات) . ويمكن صياغة تلك العلاقة فى شكل معادله رياضيه على النحو التالى :-

♦ $\text{تكاليف التخزين} = \text{تكاليف إصدار الطلبه}$

ويُقصد بـ تكاليف التخزين :

♦ $\text{متوسط كمية التخزين} \times \text{تكلفة تخزين الوحده}$

حيث :

$\frac{\text{الكمية الإقتصادية للطلب}}{2} = \text{متوسط كمية التخزين}$

(١) نموذج المحاكاة

بحوث العمليات

وإذا رمزنا للكمية الإقتصادية للطلب بالرمز ك ، ورمزنا لتكلفة تخزين الوحدة بالرمز ز فإن :-

$$\text{تكاليف التخزين} = \frac{ك}{٢} \times ز$$

ويتضح وجود علاقة طردية بين كمية المخزون وتكاليف التخزين ، فإذا زادت الأولى زادت الثانية والعكس صحيح .

♦ ويُقصد بتكاليف الطنبية :

كافة التكاليف التى تنفقها الإدارات المختلفة بالمشروع على الصفقات والطلبات التى تعقدتها مع الموردين من وقت الشعور بالحاجة حتى وقت وصولها . ويتضح وجود علاقة عكسية بين كمية الطلب وتكلفة الحصول على الطنبية .

تكاليف إصدار الطلبيات =

= عدد مرات الطلب خلال العام \times تكلفة إصدار الطنبية الواحد

فإذا رمزنا لعدد مرات الطلب خلال العام بالرمز م ، حيث :

$$\text{عدد مرات الطلب خلال السنة} = \frac{\text{الطلب السنوى}}{\text{الكمية الإقتصادية للطلب}}$$

$$\therefore م = \frac{ط}{ك}$$

وإذا رمزنا أيضاً لتكاليف إصدار الطنبية الواحد بالرمز ت يكون :

$$\text{تكاليف إصدار الطلبيات} = م \times ت$$

$$\therefore \text{تكاليف إصدار الطلبيات} = \frac{ط}{ك} \times ت$$

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

♦ ويُقصد أيضاً بمدة التوريد ، (فترة التوريد) :

هي عبارته عن الفترة التي تنقضي بين إصدار أمر التوريد ووقت وصول الطلبية إلى المخازن ، وسنرمز لها بالرمز ف .

** ويُقصد أيضاً بمعدل الإستهلاك اليومي :

هو متوسط الكميات المسحوبة من المخازن يومياً طوال السنة .
وسنرمز له بالرمز هـ .

** ويُقصد بتكاليف نفاذ المخزون :

هي جميع التكاليف التي ترتبط ارتباطاً مباشراً بعدم توافر الكميات المطلوبة من المواد ، المواد تحت التشغيل ، أو السلع تامة الصنع . ومن أمثلة تلك التكاليف نفقات توقف الخط الإنتاجي نتيجة عدم كفاية المواد الخام ، وكذلك الأرباح التي يفقدها المشروع نتيجة عدم وجود مخزون كاف من السلع تامة الصنع . . . إلخ . وسنرمز لتلك التكاليف بالرمز س .

ولتحديد الكمية الاقتصادية للطلب يجب أن تتعادل تكلفة التخزين مع تكلفة إصدار الطلبيات .

أي أن : $\frac{ك}{٢} \times ز = \frac{ط}{ك} \times ت$ ، حيث ت تكلفة إصدار الطلبية الواحدة

وبالضرب $ك \times \frac{ك}{٢} = ز \times \frac{ط}{ك} \times ت$

وبالضرب $\times \frac{٢}{ز} = \frac{٢ ط ت}{ز} = ك$.

♦ . الكمية الاقتصادية للطلب = $ك = \sqrt{\frac{٢ ط ت}{ز}}$

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

مثال (٣)

إذا إتضحت لك البيانات التالية ، فأوجد الكمية الإقتصادية للطلب :

(١) كمية الطلب السنوى (الإحتياجات السنويه) هى ٨٠٠٠ وحدة ، تستهلك بمعدل ثابت سنوياً

(٢) تكلفة شراء الوحدة = ١ (جنيه واحد) .

(٣) تكلفة أمر الشراء الواحد (تكاليف إصدار الطلبيه) = ١٢,٥ جنيه

(٤) تكلفة التخزين للوحده الواحده = ٢٠ ٪ من تكلفة شراء الوحدة .

الحل

يتطلب الحل مبدئياً الوصول إلى تحديد الكمية الإقتصادية للطلب بحيث

يكون تكاليف التخزين = تكاليف إصدار الطلبيات .

وذلك على النحو التالى :

البيان	١	٢	٤	٦	٨	١٠	م : عدد مرات الطلب
متوسط كمية المخزون	٨٠٠٠	٤٠٠٠	٢٠٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	ك : الكمية الإقتصادية للطلب
تكلفة التخزين	٨٠٠	٤٠٠	٢٠٠	١٥٠	١٠٠	٨٠	ك : $\frac{ك}{٢}$
تكاليف إصدار الطلبيه	١٢,٥	٢٥	٥٠	٧٥	١٠٠	١٢٥	ك : $\frac{ك}{٢} \times ز$
إجمالى التكاليف	٨١٢,٥	٤٢٥	٢٥٠	٢٢٥	٢٠٠	٢٠٥	م : $ز \times م$

حوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

ويتضح من الجدول السابق أن الكمية الإقتصادية للطلب K المثلى هي ١٠٠٠ وحدة ، وأن عدد مرات الطلب = ٨ مرات لتوفير الاحتياجات سنوية بإجمالي تكلفه = ٢٠٠ جنيه . حيث أنها تمثل أدنى إجمالي التكاليف ، بالإضافة إلى تعادل تكلفة التخزين وتكلفة إصدار الطلبات .

وعلى ذلك ، فإن تحديد الكمية الإقتصادية للطلب K تتحدد طبقاً لعلاقته التالية :

تكاليف التخزين = تكاليف إصدار الطلبات

$$\therefore \frac{K}{2} \times Z = \frac{P}{Q} \times T \quad . \text{ حيث (ت) تكلفة إصدار الطلبية الواحدة}$$

بالضرب $\times K$

$$\therefore \frac{K^2}{2} \times Z = P \times T$$

بالضرب $\times \frac{2}{Z}$

$$\therefore \frac{2PT}{Z} = K^2$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = K = \sqrt{\frac{2PT}{Z}}$$

من المثال السابق نجد أن :

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = K = \sqrt{\frac{12,5 \times 8000 \times 2}{0,20}}$$

$$= 1000 \text{ وحدة}$$

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

مثال (٤)

إذا إتضحت لك البيانات التالية :

- ١- كمية الإحتياجات السنوية = ١٨٠٠ وحدة ٢- تكلفة إصدار أمر
الشراء الواحد = ١٠٠ جنيه ٣- تكلفة التخزين للوحده الواحد سنوياً =
٤ جنيهات والمطلوب إيجاد الكمية الإقتصادية للشراء ؟

الحل :

من البيانات نجد أن : ط = ١٨٠٠ وحدة ، ت = ١٠٠ ج ، ز = ٤ ج

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ ط ت}{ز}}$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{١٠٠ \times ١٨٠٠ \times ٢}{٤}} = ٣٠٠ \text{ وحدة .}$$

مثال (٥)

- إذا كانت الإحتياجات السنوية (الطلب السنوي) = ٣٠٠٠ وحدة ، وكانت
تكلفة الطلبية الواحدة = ١٠٠٠ جنيه ، وتخزين الوحدة سنوياً تكلفها (٢٤)
جنيه . ماهو عدد وحدات الطلبية الواحدة (الكمية الإقتصادية للطلب) ؟

الحل :

من البيانات نجد أن : ط = ٣٠٠٠ وحدة ، ت = ١٠٠٠ ج ، ز = ٢٤ ج

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ ط ت}{ز}}$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{١٠٠٠ \times ٣٠٠٠ \times ٢}{٢٤}}$$

$$= ٥٠٠ \text{ وحدة .}$$

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

تحديد مستويات المخزون

إن نقطة البدء لرقابة المخزون هو تحديد مستويات المخزون السلعي بحيث تشمل على :

(١) مخزون الأمان :

وهو المستوى الذى لا يجب أن يقل عنه المخزون من المواد ، وهو الحد الأدنى لمواجهة الظروف الطارئة ، بحيث لا يتوقف الإنتاج بسبب نفاذ الكمية للمخزون ، وسنرمز له بالرمز خ

(٢) نقطة (مستوى) إعادة الطلب :

وهو كمية المخزون التى يجب عندها إصدار أمر الشراء لتوفير كمية جديدة من الصنف موضع البحث ، أي هو المستوى الذى إذا وصل إليه المخزون من المواد نبداً مباشرة فى إجراءات طلب كميات من المواد (الكمية الإقتصادية المثلى للطلب) ، ويتوقف حجم مخزون إعادة الطلب على عدة عوامل من أهمها ، معدل الاستخدام أو السحب (معدل الإستهلاك) اليومي هـ ، وطول فترة التوريد ف ، وسنرمز لمستوى إعادة الطلب بالرمز ن

(٣) الحد الأقصى للمخزون :

وهو المستوى الذى لا يتبغى أن يزيد عنه المخزون من أى مادة ، والهدف من تحديد هذا الحد الأقصى هو الحد من الإسراف فى استثمار أموال المشروع وجود ما يبرر ذلك .

ويمكن احتساب نقطة (مستوى) إعادة الطلب على النحو التالى :-

مستوى إعادة الطلب ن = فترة التوريد ف × معدل الاستخدام اليومي هـ

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

** ففى حالة ما إذا كان مخزون الأمان = صفر ، يكون :

$$ن = ف \times هـ$$

** أما إذا كان مخزون الأمان أكبر من الصفر ، يكون :

$$ن = (ف \times هـ) + خ$$

كما يمكن حساب الحد الأقصى للمخزون كما يلي : -

الحد الأقصى = مخزون الأمان + الكمية الإقتصادية للطلب

$$= خ + ك$$

مثال (٦)

إذا إتضحت لك البيانات التالية :

- ١- كمية الطلب السنوي هي ١٢٠٠٠ وحدة .
- ٢- متوسط الإستخدام اليومي = ٤٠ وحدة .
- ٣- تكلفة التخزين للوحدة الواحد سنوياً = ٠,٢٤ جنيه .
- ٤- فترة التوريد = ٤ أيام .
- ٥- تكلفة الطلب الواحد = ٢ جنيه .
- ٦- مخزون الأمان = ١٠ وحدات .

والمطلوب تحديد مايلي :

- ١ - الحجم الأمثل لكمية الشراء (الكمية الإقتصادية للطلب) ؟ .
- ٢ - مستوى إعادة الطلب ؟ .
- ٣ - الحد الأقصى للتخزين ؟ .
- ٤ - التكاليف الكلية للطلب ؟ .

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

الحل :

١ - الحجم الأمثل لكمية الشراء (الكمية الاقتصادية للطلب) :

$$\therefore \text{ط} = ١٢٠٠٠ \text{ وحدة} , \quad \text{ت} = ٢ \text{ ج} , \quad \text{ز} = ٠,٢٤ \text{ ج}$$

$$\therefore \text{الكمية الاقتصادية للطلب} = \text{ك} = \sqrt{\frac{\text{ط} \times \text{ت}}{\text{ز}}}$$

$$\therefore \text{الكمية الاقتصادية للطلب} = \text{ك} = \sqrt{\frac{٢ \times ١٢٠٠٠ \times ٢}{٠,٢٤}}$$

$$= ٤٤٧ \text{ وحدة} .$$

٢ - نقطة إعادة الطلب :

$$\text{ن} = (\text{ف} \times \text{هـ}) + \text{خ}$$

$$= ١٠ + (٤٠ \times ٤) = ١٦٠ + ١٠ = ١٧٠ \text{ وحدة} .$$

٣ - الحد الأقصى للتخزين = مخزون الأمان + الكمية الاقتصادية للطلب

$$= \text{خ} + \text{ك}$$

$$= ٤٤٧ + ١٠ =$$

$$= ٤٥٧ \text{ وحدة} .$$

٤ - التكاليف الكلية للطلب = تكاليف التخزين + تكاليف إصدار الطلبات

$$= \frac{\text{ك}}{٢} \times \text{ز} + \text{ت} \times \text{ط}$$

$$= \frac{٤٤٧}{٢} \times ٠,٢٤ + ٢ \times \frac{١٢٠٠٠}{٤٤٧}$$

$$= ٥٣,٦٤ + ٥٣,٦٩ =$$

$$= ١٠٧,٣٣ \text{ جنيه} .$$

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

مثال (٧)

بفرض توافر البيانات التالية :

- ١- كمية الإحتياجات السنوية هي ٢٠٠٠٠ وحدة .
- ٢- تكلفة إصدار الطلبية = ٨ جنيه .
- ٣- تكلفة التخزين للوحدة الواحد سنوياً = ٠,٠٢ جنيه .
- ٤- فترة التوريد = ٦ أيام .
- ٥- عدد أيام العمل في السنة = ٣٠٠ يوم .
- ٦- مخزون الأمان = ١٠٠٠ وحدة .

والمطلوب تحديد مايلي :

- ١ - الكمية الإقتصادية للطلب ؟ .
- ٢ - نقطة إعادة الطلب ؟ .
- ٣ - الحد الأقصى للتخزين ؟ .
- ٤ - التكاليف الكلية للطلب ؟ .

الحل :

١ - الكمية الإقتصادية للطلب :

من بيانات المثال نجد أن :

$$ط = ٢٠٠٠٠ \text{ وحدة} ، ت = ٨ \text{ ج} ، ز = ٠,٠٢ \text{ ج}$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ ط ت}{ز}}$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٨ \times ٢٠٠٠٠ \times ٢}{٠,٠٢}} = ٤٠٠٠ \text{ وحدة} .$$

بحوث العمليات

(١) نموذج محاكاة

٢ - نقطة إعادة الطلب :

$$ن = (ف \times هـ) + خ$$

$$١٠٠٠ + (٦٦,٧ \times ٦) =$$

$$١٤٠٠ = ١٠٠٠ + ٤٠٠ =$$

وحدد .

حيث :

$$هـ = \frac{\text{الطلب السنوي}}{\text{عدد أيام العمل في السنة}} = \text{الإستهلاك اليومي}$$

$$\therefore هـ = \frac{٢٠٠٠٠}{٣٠٠} = ٦٦,٧ \text{ وحدة تقريباً .}$$

٣ - الحد الأقصى للتخزين = مخزون الأمان + الكمية الإقتصادية للطلب

$$خ - ك =$$

$$٤٠٠٠ + ١٠٠٠ =$$

$$٥٠٠٠ = \text{وحدد .}$$

٤ - التكاليف الكلية للطلب = تكاليف التخزين + تكاليف إصدار الطلبات

$$= \frac{ك}{٢} \times ز - \frac{ط}{ك} \times ت$$

$$= \frac{٤٠٠٠}{٢} \times ٠,٠٣ + ٨ \times \frac{٢٠٠٠٠}{٤٠٠٠}$$

$$= ٤٠ + ٤٠ =$$

$$= ٨٠ \text{ جنيه .}$$

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

مثال (٨)

بفرض أن حجم الطلب على سلعة معينة عن (٦٠٠) يوم على النحو التالي :

حجم الطلب	صفر	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	٣٠	٦٠	١٢٠	٢٤٠	٩٠	٦٠

والمطلوب محاكاة الطلب عن عشرة (١٠) أيام قادمة مستخدماً الأرقام

العشوائية التالية : ٣٧ : ١٣ ، ٨٨ ، ٣٢ ، ٥١ ، ١٨ ، ٧٥ ، ٦٢ ، ٠٣ ، ٢٥

الحل :

لمحاكاة الطلب نمر بالخطوات السابق إيضاها على النحو التالي :

يتم تحويل جدول التوزيع التكراري إلى جدول توزيع احتمالي بقسمة كل

تكرار ÷ مجموع التكرارات (٦٠٠) ، ثم نوجد الإحتمال المتجمع الصاعد ،

ومن ثم يتم تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع .

ومن هنا يمكن تكوين الجدول التالي :

حجم الطلب	عدد الأيام (التكرار) (ك)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المتجمع	الأرقام العشوائية
صفر	٣٠	٠,٠٥	٠,٠٥	من ٠٤ : ٠٠
١	٦٠	٠,١٠	٠,١٥	من ١٤ : ٠٥
٢	١٢٠	٠,٢٠	٠,٣٥	من ٣٤ : ١٥
٣	٢٤٠	٠,٤٠	٠,٧٥	من ٧٤ : ٣٥
٤	٩٠	٠,١٥	٠,٩٠	من ٨٩ : ٧٥
٥	٦٠	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٩ : ٩٠
المجموع	٦٠٠	١,٠٠	---	----

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

ولمحاكاة الطلب عن عشرة (١٠) أيام قادمة يتم ترجمة الأرقام العشوائية المنتجة في الجدول السابق إلى أرقام لحجم الطلب عن العشرة أيام المقبلة ، ووضع النتائج في جدول على النحو التالي :

الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة)	حجم الطلب
٣٧	٣
١٣	١
٨٨	٤
٣٢	٢
٥١	٣
١٨	٢
٧٥	٤
٦٢	٣
٠٣	صفر
٢٥	٢

وعلى ذلك يكون متوسط الطلب اليومي عن العشرة أيام القادمة من واقع نظام المحاكاة هو :

$$= \frac{٣ + ١ + ٤ + ٢ + ٣ + ٢ + ٤ + ٣ + ٤ + ٣ + \text{صفر} + ٢}{١٠}$$

$$= \frac{٢٤}{١٠} = ٢,٤ \text{ وحدة يومياً ، وهي التي يتم مقارنتها بالقيمة}$$

المتوقعة ، حيث :

$$\begin{aligned} \text{القيمة المتوقعة} &= (\text{صفر} \times ٠,٥) + (٠,١ \times ١) + (٠,٢ \times ٢) \\ &+ (٠,٤ \times ٣) + (٠,١٥ \times ٤) + (٠,١ \times ٥) \\ \therefore \text{القيمة المتوقعة} &= \text{صفر} + ٠,١ + ٠,٤ + ١,٢ + ٠,٦ + ٠,٥ \\ &= ٢,٨ \text{ وحدة يومياً .} \end{aligned}$$

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

وبفرض أنه من واقع الخبرة الماضية تم التوصل إلى النتائج التالية عن
(١٠٠) طلبية :

-١-

٤	٣	٢	١	وقت الطلبية (باليوم)
١٠	٢٠	٣٠	٤٠	عدد الأيام (التكرار)

-٢- تُستخدم الأرقام العشوائية التالية :

١٧ ، ٣٥ ، ٣٢ ، ٥١ ، ٦٨ ، ٦٢ ، ٥٥ ، ٧٤ ، ٤١ ، ٩٨

-٣- أن حجم الطلبية الواحدة = (٨) وحدات

-٤- وأن نقطة إعادة الطلب = (٤) وحدات

-٥- تكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠ جنيه

-٦- تكلفة التخزين للوحدة = (جنيه واحد) سنوياً .

-٧- تكلفة نفاد المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود بضاعة) = ٩ جنيه

والمطلوب إيجاد :

(١) متوسط المخزون آخر كل يوم؟ .

(٢) متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة ؟ .

(٣) متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد؟ .

(٤) متوسط تكلفة التخزين يومياً ؟ .

(٥) متوسط تكلفة نفاد المخزون ؟ .

(٦) تكلفة الطلبية لليوم الواحد؟ .

(٧) التكلفة الإجمالية ؟ .

بحوث العمليات

(١) نموذج محاكاة

الحل :

يتم تحويل جدول التوزيع التكراري إلى جدول توزيع احتمالي ، ثم نوجد الإحتمال المتجمع الصاعد ، ومن ثم يتم تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المتجمع كما يلي :

وقت الطلبية باليوم	عدد الأيام (التكرار) (ك)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المتجمع	الأرقام العشوائية
١	٤٠	٠,٤٠	٠,٤٠	من ٠٠ : ٣٩
٢	٣٠	٠,٣٠	٠,٧٠	من ٣٩ : ٦٩
٣	٢٠	٠,٢٠	٠,٩٠	من ٦٩ : ٨٩
٤	١٠	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٠ : ٩٩
المجموع	١٠٠	١,٠٠	---	---

ولتحقيق المطلوب في هذا المثال نكون الجدول التالي :

الأيام	الوحدات الواردة	المخزون أول كل يوم	الطلب من واقع المحاكاة	رصيد آخر كز يوم	المبيعات الضائعة	إصدار أمر	الرقم العشوائي	الوقت اللازم لوصول الطلبية
١	صفر	٨	٣	٥	صفر	لا	١٧	
٢	صفر	٥	١	٤	صفر	نعم	٣٥	١
٣	صفر	٤	٤	صفر	صفر	لا	٣٢	
٤	٨	٨	٢	٦	صفر	لا	٥١	
٥	صفر	٦	٣	٣	صفر	نعم	٦٨	٢
٦	صفر	٣	٢	١	صفر	لا	٦٢	
٧	صفر	١	٤	صفر	٣	لا	٥٥	
٨	٨	٨	٣	٥	٨	لا	٧٤	
٩	صفر	٥	صفر	٥	صفر	لا	٤١	
١٠	صفر	٥	٢	٣	صفر	نعم	٩٨	٤
			٢٤	٣٢	٣			

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

وعلى ذلك يكون :

$$(١) \text{ متوسط المخزون آخر كل يوم} = \frac{٣٢}{١٠} = ٣,٢ \text{ وحدة .}$$

$$(٢) \text{ متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة} = \frac{٣}{١٠} = ٠,٣ \text{ وحدة .}$$

$$(٣) \text{ متوسط عدد الطلبات لليوم الواحد} = \frac{٣}{١٠} = ٠,٣ \text{ وحدة .}$$

$$(٤) \text{ متوسط تكلفة التخزين يومياً} = ١ \times ٣,٢ = ٣,٢ \text{ جنيه .}$$

$$(٥) \text{ متوسط تكلفة نفاد المخزون}$$

$$= \text{الربح الضائع} \times \text{متوسط عدد الوحدات التي لم يتمكن من بيعها}$$

$$= ٩ \times ٠,٣ = ٢,٧ \text{ جنيه .}$$

$$(٦) \text{ متوسط تكلفة الطلبية لليوم الواحد} = ٢٠ \times ٠,٣ = ٦ \text{ جنيهات .}$$

$$(٧) \text{ متوسط التكلفة الإجمالية يومياً للطلبات والتخزين والربح الضائع} =$$

$$= ٦ + ٣,٢ + ٢,٧ = ١١,٩ \text{ جنيه .}$$

مثال (٩)

شركة تفاضل بين نظامين للمخزون السلعي :

$$(١) \text{ النظام الأول : كمية الطلبية الواحدة} = ٥٠ ، \text{ والحد الأدنى للطلب} = ٣٠$$

$$(٢) \text{ النظام الثاني : كمية الطلبية الواحدة} = ٤٥ ، \text{ والحد الأدنى للطلب} = ٢٥$$

فإذا علمت أن :

$$[١] \text{ تكلفة التخزين للوحدة} = (\text{جنيه واحد}) \text{ يومياً}$$

$$[٢] \text{ تكلفة الطلبية الواحدة} = ٢٠ \text{ جنيه}$$

$$[٣] \text{ تكلفة نفاد المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود بضاعة)} = ٥ \text{ جنيه}$$

$$[٤] \text{ التوزيعات الاحتمالية للطلب اليومي والوقت اللازم لإجاز الطلبية على}$$

النحو التالي :

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

حجم الطلب اليومي	الإحتمال	الوقت اللازم للطلبية	الإحتمال
١٠	٠,٢٠	١	٠,١٠
١١	٠,٥٠	٢	٠,٣٠
١٢	٠,٣٠	٣	٠,٦٠

والمطلوب :

إستخدم أسلوب المحاكاة في المفاضلة بين النظامين؟.

الحل :

حيث أننا نرغب في المحاكاة للمفاضلة بين النظامين لمدة عشرة أيام ، فإننا نختار بطريقة عشوائية الأرقام من أي عمودين للأرقام العشوائية للأيام العشرة ، أو نستخدم الآلة الحاسبة . وبفرض أن الأرقام العشوائية هي :

٩٤ ، ١٦ ، ٧٣ ، ٤٦ ، ٢٠ ، ٩٩ ، ٣٥ ، ٠١ ، ١٧ ، ٣٢

ومن هنا يمكن تكوين الجدول التالي :

الأيام	الأرقام العشوائية المنتجة	الطلب من واقع المحاكاة
١	٩٤	١٢
٢	١٦	١٠
٣	٧٣	١٢
٤	٤٦	١١
٥	٢٠	١١
٦	٩٩	١٢
٧	٣٥	١١
٨	٠٣	١٠
٩	١٧	١٠
١٠	٣٢	١١
مجموع		١١٠

(١) نموذج المداكاة

بحوث العمليات

نوجد الإحتمال المتجمع التصاعد ، ومن ثم يتم تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع كما يلي :

الأرقام العشوائية	الإحتمال المتجمع	الإحتمال (ح)	الوقت اللازم للطبيرة
من ٠٩ : ٠٠	٠,١٠	٠,١٠	١
من ٣٩ : ٠٩	٠,٤٠	٠,٣٠	٢
من ٩٩ : ٤٠	١,٠٠	٠,٦٠	٣
----	---	١,٠٠	المجموع

وبالاعتماد على نظام المداكاة لتقدير حجم الطلب للعشرة أيام فإنه :

بالنسبة للنظام الأول :

حيث أن حجم الطبيرة الواحدة = ٥٠ وحدة ، ونقط إعادة الطلب (الحد الأدنى للطبيرة) = ٣٠ وحدة ، فإن :

الأيام	الوحدات الواردة	المتخزون أول كل يوم	الطلب من واقع المداكاة	رصيد آخر كل يوم	المبيعات الضائعة	إصدار أمر	الرفء العشوائي	الوقت اللازم لتوصل الطلبية
١	صفر	٥٠	١٢	٣٨	صفر	لا	٤١	
٢	صفر	٣٨	١٠	٢٨	صفر	نعم	٠٦	١
٣	صفر	٢٨	١٢	١٦	صفر	لا	٥٠	
٤	٥٠	٦٦	١١	٥٥	صفر	لا	١٥	
٥	صفر	٥٥	١١	٤٤	صفر	لا	٣٨	
٦	صفر	٤٤	١٢	٣٢	صفر	لا	٥١	
٧	صفر	٣٢	١١	٢١	صفر	نعم	٢٤	٢
٨	صفر	٢١	١٠	١١	صفر	لا	٦٩	
٩	صفر	١١	١٠	١	صفر	لا	٨٥	
١٠	٥٠	٥١	١١	٤٠	صفر	لا	٥٤	
	-----		١١٠	٢٨٦	صفر	----		

حيث أن الأرقام العشوائية الخاصة بوقت الطبيرة حسب الآلة الحاسب هي :

٤١ ، ٠٦ ، ٥٠ ، ١٥ ، ٣٨ ، ٥١ ، ٢٤ ، ٦٩ ، ٨٥ ، ٥٤

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

وعلى ذلك يكون :

- (١) متوسط المخزون آخر كل يوم $= \frac{286}{10} = 28,6$ وحدة .
- (٢) متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة = صفر .
- (٣) متوسط عدد الطلبات لليوم الواحد $= \frac{2}{10} = 0,2$ وحدة .
- (٤) متوسط تكلفة الطلبية لليوم الواحد $= 20 \times 0,2 = 4$ جنيهات .
- (٥) متوسط تكلفة التخزين يومياً $= 1 \times 28,6 = 28,6$ جنيهه .
- (٦) متوسط تكلفة نفاد المخزون = صفر
- (٧) متوسط التكلفة الإجمالية $= 4 + 28,6 + \text{صفر} = 32,6$ جنيهه .

بالنسبة للنظام الثاني :

حيث أن حجم الطلبية الواحدة = ٥٠ وحدة ، ونقط إعادة الطلب (الحد الأدنى للطلبية) = ٢٥ وحدة ، فإن :

الأيام	الوحدات الواردة	المخزون أول كل يوم	الطلب من واقع المحاكاة	رصيد آخر كل يوم	المبيعات الضائعة	إصدار أمر	الرقم العشوائي	الوقت اللازم لوصول الطلبية
١	صفر	٤٥	١٢	٣٣	صفر	لا	٧٩	
٢	صفر	٣٣	١٠	٢٣	صفر	نعم	٠٩	١
٣	صفر	٢٣	١٢	١١	صفر	لا	١٤	
٤	٤٥	٥٦	١١	٤٥	صفر	لا	٢٨	
٥	صفر	٤٥	١١	٣٤	صفر	لا	٤٥	
٦	صفر	٣٤	١٢	٢٢	صفر	نعم	٢١	
٧	صفر	٢٢	١١	١١	صفر	لا	٦٦	٢
٨	صفر	١١	١٠	١	صفر	لا	٢٦	
٩	صفر	٤٦	١٠	٣٦	صفر	لا	٨٩	
١٠	٤٥	٣٦	١١	٢٥	صفر	نعم	١٧	٢
	-----		١١٠	٢٤١	صفر	-----		

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

حيث أن الأرقام العشوائية الخاصة بوقت الطلبية حسب الآلة الحاسبة هي :

١٧ ، ٨٩ ، ٢٦ ، ٦٦ ، ٢١ ، ٤٥ ، ٣٨ ، ١٤ ، ٠٩ ، ٧٩

وعلى ذلك يكون :

١. متوسط المخزون آخر كل يوم $= \frac{241}{10} = 24,1$ وحدة .

٢. متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة = صفر .

٣. متوسط عدد الطلبات لليوم الواحد $= \frac{3}{10} = 0,3$ وحدة .

٤. متوسط تكلفة الطلبية لليوم الواحد $= 20 \times 0,3 = 6$ جنيهات .

٥. متوسط تكلفة التخزين يومياً $= 1 \times 24,1 = 24,1$ جنيه .

٦. متوسط تكلفة نفاد المخزون = صفر .

٧. متوسط التكلفة الإجمالية $= 6 + 24,1 + \text{صفر} = 30,1$ جنيه .

ومن هنا نلاحظ أن البديل الثاني أفضل من البديل الأول لأن التكلفة الإجمالية

للمخزون السلعي أقل ، وبالتالي ، فإن البديل الثاني يحقق وفر مقداره :

$$32,6 - 30,1 = 2,5 \text{ وحدة نقد}$$

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

تمارين على نموذج المحاكاة

(١) بغرض أن أحد وكلاء إحدى شركات السيارات يريد أن يقدر حجم المبيعات خلال فترة زمنية قادمة ، ولتكن سنة قادمة ، باستخدام نظام المحاكاة ، ونتحقق هذا الغرض أمكن الحصول على أرقام المبيعات خلال فترة زمنية كافية في الماضي (١٥٠٠ يوم عمل) ، كما أمكن تلخيص هذه المبيعات في الجدول التالي :

عدد السيارات المباعة	عدد الأيام (التكرار)
(س)	(ك)
صفر	٧٥
١	٣٧٥
٢	٤٥٠
٣	٣٠٠
٤	٢٢٥
٥	٧٥
المجموع	١٥٠٠

والمطلوب :

تقدير المبيعات خلال (١٠) عشرة أيام قادمة ؟

ملحوظة : يمكنك استخدام الأرقام العشوائية التالية المستخرجة من جدول الأرقام العشوائية :

٩٥ ، ٨٤ ، ٠٠ ، ٥٧ ، ٥٤ ، ٢٣ ، ٠٢ ، ٠٨ ، ٢٨ ، ٧٨

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

(٢) فيما يلي متوسط وقت أداء الخدمة بورشة محمد المفتي لإصلاح السيارات
والإحتمالات الخاصة بها :

متوسط الزمن بالدقائق	الإحتمال
٧٥	٠,٢٠
١٥٠	٠,٤٠
٣٠٠	٠,٣٠
٦٠٠	٠,١٠

المطلوب إجراء المحاكاة بالنسبة لعشرة حالات لإصلاح السيارات ، بفرض
أن الأرقام العشوائية المستخرجة هي :

٩٥ ، ٨٤ ، ٠٠ ، ٥٧ ، ٥٤ ، ٢٣ ، ٠٢ ، ٠٨ ، ٢٨ ، ٧٨

(٣) بفرض أنه كانت التكاليف الخاصة بأحد المنشآت خلال ال (٢٠٠) شهر
الماضية كما يلي :

التكاليف (س)	عدد الشهور (التكرار) (ك)
٢٥٠٠٠	٥
٢٦٠٠٠	٢٥
٢٧٠٠٠	٣٠
٢٨٠٠٠	٣٥
٢٩٠٠٠	٤٠
٣٠٠٠٠	٢٥
٣١٠٠٠	١٥
٣٢٠٠٠	١٠
٣٣٠٠٠	١٥
المجموع	٢٠٠

والمطلوب : محاكاة التكاليف خلال (١٠) عشرة شهور القادمة ؟.

ملحوظة : يمكنك استخدام الأرقام العشوائية التالية المستخرجة من جدول
الأرقام العشوائية :

٧١ ، ٧٣ ، ٦٦ ، ٨٩ ، ٦٣ ، ٥٤ ، ٣٨ ، ٠٤ ، ٠٣ . . .

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

(٤) إذا كانت مبيعات توكيل طارق لسيارات خلال (٨٠) أسبوع على النحو التالي :

٦	٥	٤	٣	٢	١	عدد السيارات المباعة
٨	١٢	١٦	١٦	٢٤	٤	عدد الأسابيع

والمطلوب إستخدام الأرقام العشوائية التالية في محاكاة الطلب على سيارات التوكيل عن العشرين (٢٠) أسبوع القادمة :

٢٩ ، ٩٨ ، ٥٤ ، ٢٢ ، ٨٢ ، ٣٧ ، ٦٢ ، ٣٥ ، ٠٢ ، ٨٨

٤٩ ، ٥٧ ، ٣٨ ، ٧٣ ، ٣٢ ، ١٧ ، ٠٣ ، ٠٦ ، ٧٧ ، ٤٢

ثم أجب عن الأسئلة التالية :

١. إذا كان حجم المعروض من السيارات = ٤ سيارات أسبوعياً بصفة دائمة ، فما هو عدد المرات التي يعجز فيها التوكيل عن تلبية الطلبات ؟

٢. بفرض عدم إستخدام أسنوب للمحاكاة لتقدير حجم الطلب على السيارات ما هو متوسط حجم المبيعات المتوقع عن الأسبوع الواحد ؟

٥) إذا كانت الإحتياجات السنوية (الطلب السنوي) = ٦٠٠٠ وحدة ، وكانت تكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠٠٠ جنيه ، وتخزين الوحدة سنوياً تكلفها (٤٨) جنيه ٠ ماهو عدد وحدات الطلبية الواحدة (الكمية الإقتصادية للطلب) ؟

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

(٦) بفرض أن حجم الطلب على سعة معينة عن (١٠٠٠) يوم على النحو التالي :

حجم الطلب	صفر	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	١٣٠	١٦٠	٢٢٠	٢٤٠	٩٠	١٦٠

والمطلوب محاكاة الطلب عن عشرة (١٠) أيام قادمة مستخدماً الأرقام العشوائية التالية : ١٣ ، ٨٨ ، ٥١ ، ٣٢ ، ٢٥ ، ٠٣ ، ٦٢ ، ٧٥ ، ١٨ ، ٣٧
وبفرض أن حجم الطلبية الواحدة = (١٦) وحدة ، وأن نقطة إعادة الطلب = (٨) وحدات ، وتكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠ جنيه ، وتكلفة التخزين لنوحدة = (١،٥) جنيه سنوياً ، تكلفة نفاد المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود بضاعة) = ١٠ جنيه ، والمطلوب إيجاد :

- ١- متوسط المخزون آخر كل يوم ٢- متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة
- ٣- متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد؟ ٤- متوسط تكلفة التخزين يومياً
- ٥- متوسط تكلفة نفاد المخزون ؟ ٦- تكلفة الطلبية لليوم الواحد؟
- ٧- التكلفة الإجمالية ؟

علماً بأنه من واقع الخبرة الماضية تم التوصل للنتائج التالية عن ١٠٠ طلبية

وقت الطلبية	١	٢	٣	٤
عدد الأيام	٤٠	٣٠	٢٠	١٠

يمكنك استخدام الأرقام العشوائية التالية :

٧١ ، ٧٣ ، ٦٦ ، ٨٩ ، ٦٣ ، ٥٤ ، ٣٨ ، ٩ ، ٠٠ ، ٣

(٨) يوضح الجدول التالي الطلب اليومي على إطارات السيارات لأحد الشركات خلال المائتي يوم الماضية :

الطلب على الإطارات	صفر	١	٢	٣	٤	٥
تكرار الطلب	١٠	٢٠	٤٠	٦٠	٤٠	٣٠

بحوث العمليات

(١) نموذج المحاكاة

والمطلوب محاكاة الطلب عن العشرة أيام القادمة مستخدماً الأرقام العشوائية

التالية : ١٢ ، ٨٠ ، ٢ ، ٣٦ ، ٩٥ ، ٨٦ ، ٤٢ ، ٤٠ ، ٢٠ ، ٦٢

ثم أوجد القيمة المتوقعة للطلب؟

(٩) إذا كان الطلب على أحد المنتجات عن ٣٠٠ يوم على النحو التالي :

حجم الطلب	صفر	١	٢	٣	٤	٥
تكرار الطلب	١٥	٣٠	٦٠	١٢	٤٥	٢٠

والمطلوب محاكاة الطلب عن العشرة أيام القادمة مستخدماً الأرقام العشوائية

التالية : ٦ ، ٦٣ ، ٥٧ ، ٩٤ ، ٥٢ ، ٦٩ ، ٣٢ ، ٣٠ ، ٤٨ ، ٨٨

وبفرض أن حجم الطلبية الواحدة ١٠ وحدات ، وأن نقطة إعادة الطلب = ٥

وحدات ، وتكلفة الطلبية الواحدة = ٥٠٠ جنيهه وتكلفة تخزين الوحدة = ٥

جنيهه ، وتكلفة نفاذ المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود مخزون) = ٢٥

جنيهه ، المطلوب إيجاد :

١- متوسط المخزون آخر كل يوم ٢- متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة

٣- متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد؟ ٤- متوسط تكلفة التخزين يومياً

٥- متوسط تكلفة نفاذ المخزون ؟ ٦- تكلفة الطلبية لليوم الواحد؟

٧- التكلفة الإجمالية ؟

علماً بأنه من واقع الخبرة الماضية تم التوصل للنتائج التالية عن ٥٠ طلبية :

وقت الطلبية	١	٢	٣	٤
عدد الأيام	٢٠	١٠	١٥	٥

يمكنك استخدام الأرقام العشوائية التالية :

٧٨ ، ٢٨ ، ٨ ، ٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

الفصل الثاني

الإحلال والتجديد

Replacement

الأصول الثابتة هي أصول تفتنيها المنشأة بقصد المساعدة في العملية الإنتاجية وليس بقصد الإتجار فيها وبيعها ، مثل المباني والعدد والآلات والسيارات والأثاث وغيرها . ونظراً لأن هذه الأصول تفقد قيمتها أو كثيراً من قيمتها كلما طالت مدة استخدامها أو تشغيلها بالرغم مما يتبع من وسائل فنية لصيانتها والمحافظة عليها ، فإنه بطبيعة الحال يتبع ذلك تناقص في قيمة رأس المال المستثمر في هذه الأصول .

ولقد عالجت النظرية الاقتصادية تحديد العمر الإقتصادي للآلات والمعدات من أجل تقييم هذا الإستثمار أو المفاضلة بين أنواع مختلفة من الآلات والمعدات ، وأيضاً لإتخاذ القرار المتعلق بالإحلال أو الإستبدال من حيث حجم المنافع التي يمكن الحصول عليها ، وكلما زاد حجم المنافع التي تعود من وراء هذه المعدات كلما زاد العائد المتوقع نتيجة الإستثمار فيها واقتناؤها ، وكلما كان هناك مبرراً لنموافقة على هذا الإستثمار .

ويتوقف حجم هذه المنافع على عاملين رئيسيين ، أولهما معدلات الإنتاج لهذه المعدات ، وثانيهما ، فترة استخدام هذه المعدات ، فكلما زادت معدلات الإنتاج كلما زاد حجم المنافع من ورائها ، وفي نفس الوقت إذا طالت المدة التي يمكن فيها استخدام هذه المعدات زاد حجم المنافع من وراء الحصول على هذه المعدات .

وبالنظر إلى مبررات الإحلال نجد أنها إما تلف الآلة ، وهنا فإن الحاجة تستدعي إحلال آلة جديدة بدلاً من الآلة الحالية التي لا تعمل كما يجب ،

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

حيث تؤدي إلى تبيد وضياع التشغيل وتقليل الإنتاج وانخفاض جودة المنتج وارتفاع تكلفة العمالة والصيانة. وفي ظل هذه الظروف يصبح الإحلال أمراً ضرورياً. وأيضاً مبررات الإحلال قد يتمثل في التقادم، فبالرغم من أن هلاك الآلة يعد سبباً رئيسياً للإحلال إلا أن هناك عوامل أخرى تتدخل في الأمر لتجعل منه ليس العامل الوحيد في ذلك. وبعبارة أخرى، فإن ظهور آلة جديدة في السوق أكثر تطوراً وكفاءة من الآلة الحالية، والإصرار في تشغيل الآلة الحالية يجعل من الصعب على المشروع مسايرة التطور في الإنتاج ويترتب عليه تأثير سلبي على الأرباح والمركز التنافسي للشركة.

ومما سبق يمكننا صياغة مشكلة قرار الإحلال في الآتي :

تعرض الآلات والمعدات خلال حياتها الإنتاجية إلى التلف بالإضافة إلى ظهور آلة حديثة تؤدي نفس العمل ولكن بكفاءة أكبر، وإزاء التقدم التكنولوجي السريع أصبحت الآلات والمعدات أكثر تعرضاً للتقادم، وتتركز المشكلة في تقرير متى يكون إحلال الآلة الجديدة اقتصادياً.

تحديد مدى وفورات التكلفة المرتبطة بالإحلال والتجديد :

يقوم هذا المدخل على تحليل كل من التكاليف والفائدة والإستهلاك لكل من الآلة الحالية والمقترحة على النحو التالي :

(١) التكاليف :

إن تكاليف اقتناء الآلة تنقسم إلى تكاليف مكررة (التكاليف المتوقعة استمرارها سنة بعد أخرى ، طالما كانت الآلة مستخدمة في الإنتاج ، وتتمثل في تكلفة العمل المباشر ، والخامات ، والضرائب ، والتأمين ، والطاقة ، إلخ) وتكاليف غير مكررة (التي يتحملها المشروع مرة واحدة خلال حياة

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

الآلة وتتمثل في ثمن شرائها وتكلفة نقلها وإعدادها في موقع الإنتاج ومصروفات تجارب التشغيل (ويطلق على التكاليف المكررة وغير المكررة بالتكاليف الإستثمارية .

وعندما ترغب الشركة في شراء آلة جديدة ، فإن ذلك يتم على أساس أفضل التقديرات التي تشير إلى أن رأس المال المستثمر سوف استرداده مع العائد المناسب في المستقبل ، ويدعم هذا العائد بالفرق بين تكاليف التشغيل المكررة من الآلة الحالية والآلة الجديدة المقترحة والذي يُعرف بوفر التكلفة السنوي . ويتم تقدير وفر التكلفة السنوي بتحديد تكلفة التشغيل المقدرة للآلة الحالية وتكلفة التشغيل المقدرة للآلة الجديدة المقترحة

(٢) الفائدة على رأس المال المُستثمر :

يجب أن يُضاف إلى تكاليف التشغيل فائدة رأس المال سواء أكان رأس المال مملوكاً أو مُقترضاً .

(٣) الإهلاك :

والإهلاك هو النقص التدريجي في قيمة الأصل نتيجة للإستخدام أو لمضي المدة ، ويُحسب قسط الإهلاك السنوي ويُضاف إلى تكاليف التشغيل . وفيما يلي تطبيق لتقدير وفر التكاليف السنوي :

مثال (١)

ترغب إحدى الشركات الصناعية في شراء آلة لقطع المعادن بلغت تكاليفها الإستثمارية ١٠٠٠٠٠٠ جنيه ، وتمتلك الشركة آلة قديمة ، وأن العناصر المتباينة من تكاليف التشغيل السنوية لها ولآلة القديمة (الحالية) على النحو التالي :

(٢) الإحلال والتجديد

بحوث العمليات

الآلة الحالية	الآلة المقترحة	
٣٠٠٠٠	١٦٠٠٠	عمالة مباشرة
١٦٠٠٠	٩٠٠٠	عمالة غير مباشرة
٨٠٠٠	٢٠٠٠	صيانة
٢٠٠٠	٤٠٠٠	قوى محرك
٢٠٠٠	٦٠٠٠	ضرائب وتأمين

فإذا فرض الآتي :

(١) تبلغ القيمة البيعية للآلة الحالية ٤٠٠٠٠ جنيه .

(٢) معدل تكلفة الأموال ١٠ %

(٣) العمر الإنتاجي للآلة القديمة (الحالية) ٤ سنوات وأن

قيمتها كخردة بعد ذلك ١٠٠٠٠ جنيه .

(٤) العمر الإنتاجي للآلة الجديدة (المقترحة) ٨ سنوات وأن

قيمتها كخردة بعد ذلك ٢٠٠٠٠ جنيه .

والمطلوب إيجاد وفر التكاليف السنوي إذا تم شراء الآلة الجديدة المقترحة ؟

الحل :

العائد المُتَقَدِّد للآلة القديمة = القيمة السوقية × معدل تكلفة الأموال

$$= \frac{10}{100} \times 40000 = 4000 \text{ جنيه}$$

العائد المُتَقَدِّد للآلة الجديدة = التكاليف الإستثمارية × معدل تكلفة الأموال

$$= \frac{10}{100} \times 100000 = 10000 \text{ جنيه}$$

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

♦ قسط الإهلاك السنوي للآلة القديمة (بطريقة القسط الثابت)

$$= \frac{\text{القيمة السوقية} - \text{الخرقة}}{\text{العمر الإنتاجي}} = \frac{10000 - 3000}{4} = 1750 \text{ جنيه}$$

♦ قسط الإهلاك السنوي للآلة الجديدة المقترحة =

$$= \frac{\text{التكاليف الاستثمارية} - \text{الخرقة}}{\text{العمر الإنتاجي}} = \frac{20000 - 10000}{8} = 1250 \text{ جنيه}$$

الآلة الحالية	الآلة المقترحة	
3000	16000	عمالة مباشرة
16000	9000	عمالة غير مباشرة
8000	2000	صيانة
2000	4000	قوى محركة
2000	6000	ضرائب وتأمين
4000	10000	العائد المفقود
7500	10000	الإهلاك السنوي
69500	57000	المجموع

وفر التكاليف السنوي = 69500 - 57000 = 12500 جنيه

وعلى ذلك نجد أن وفر التكاليف السنوي = 12500 جنيه إذا تم شراء الآلة الجديدة المقترحة.

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

وفيما يلي تطبيق على الإحلال في ظل تكاليف التشغيل :

مثال (٢)

آلة تقطيع سعرها ٤٠٠٠ جنيه ، وكانت تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وسعرها في نهاية كل سنة كما يلي :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	٦٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	١٤٠٠	١٨٠٠	٢٢٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٢٤٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	٤٠٠	٤٠٠

والمطلوب حساب فترة الإحلال المتى لهذه الآلة ؟.

الحل :

أولاً : إيجاد النقص في سعر الآلة :

السنة	النقص في سعر الآلة
١	$١٦٠٠ = ٢٤٠٠ - ٤٠٠٠$
٢	$٢٥٠٠ = ١٥٠٠ - ٤٠٠٠$
٣	$٣٠٠٠ = ١٠٠٠ - ٤٠٠٠$
٤	$٣٢٠٠ = ٨٠٠ - ٤٠٠٠$
٥	$٣٦٠٠ = ٤٠٠ - ٤٠٠٠$
٦	$٣٦٠٠ = ٤٠٠ - ٤٠٠٠$

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

ثانياً : إعداد الجدول التالي :

السنة	النقص في سعر الآلة	تكلفة التشغيل والصيانة	تكلفة التشغيل والصيانة (تراكمي)
١	١٦٠٠	٦٠٠	٦٠٠
٢	٢٥٠٠	٨٠٠	١٤٠٠
٣	٣٠٠٠	١٠٠٠	٢٤٠٠
٤	٣٢٠٠	١٤٠٠	٣٨٠٠
٥	٣٦٠٠	١٨٠٠	٥٦٠٠
٦	٣٦٠٠	٢٢٠٠	٧٨٠٠

ثالثاً : إعداد جدول متوسط التكاليف الكلية :

السنة	النقص في سعر الآلة	تكلفة التشغيل والصيانة (تراكمي)	التكلفة الكلية (تراكمي)	متوسط التكاليف الكلية
١	١٦٠٠	٦٠٠	٢٢٠٠	$٢٢٠٠ = ١ \div ٢٢٠٠$
٢	٢٥٠٠	١٤٠٠	٣٩٠٠	$١٩٥٠ = ٢ \div ٣٩٠٠$
٣	٣٠٠٠	٢٤٠٠	٥٤٠٠	$١٨٠٠ = ٣ \div ٥٤٠٠$
٤	٣٢٠٠	٣٨٠٠	٧٠٠٠	$١٧٥٠ = ٤ \div ٧٠٠٠$
٥	٣٦٠٠	٥٦٠٠	٩٢٠٠	$١٨٥٠ = ٥ \div ٩٢٠٠$
٦	٣٦٠٠	٧٨٠٠	١١٤٠٠	$١٩٠٠ = ٦ \div ١١٤٠٠$

ومن الجدول السابق نجد أن متوسط التكاليف الكلية يبدأ في التناقص من نهاية السنة الأولى حتى يصل إلى أقل قيمة في نهاية السنة الرابعة ثم يبدأ في الإرتفاع مرة أخرى .

وعلى ذلك ، فإن الإحلال الأمثل يتم عند نهاية السنة الرابعة .

وفيما يلي تطبيق على الإحلال في ظل القدرة الإنتاجية للآلة :

مثال (٣)

آلة تقطيع سعرها ٤٠٠٠ جنيه ، وكانت تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وسعرها في نهاية كل سنة ، وتنتج بمعدل ١٠٠ وحدة في الساعة في حالتها الجيدة ، وخطة الإنتاج هي ١٠٠٠ وحدة في اليوم ، ولذلك يجب تشغيل الآلة لمدة عشر ساعات يومياً لتحقيق رقم الإنتاج المُستهدف ، أما في السنة الثانية فتتخفّض قدرتها الإنتاجية إلى ٩٠ وحدة ، وفي السنة الثالثة إلى ٨٠ وحدة ، ... وهكذا ، وبالتالي لابد أن يزداد عدد ساعات العمل في اليوم لتحقيق رقم الإنتاج المُستهدف ، والجدول التالي يوضح البيانات السابقة في المثال الأول بالإضافة إلى القدرة الإنتاجية للآلة وفرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	٦٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	١٤٠٠	١٨٠٠	٢٢٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٢٤٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	٤٠٠	٤٠٠
القدرة الإنتاجية للآلة	١٠٠	٩٠	٨٠	٧٠	٦٠	٥٠
فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية	صفر	٥٠	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٥٠٠

والمطلوب تحديد العمر الأمثل للإحلال ؟.

(٢) الإحلال والتجديد

بحوث العمليات

الحل :

نكون الجدول التالي :

السنة (أ)	النقص في سرعة الآلة (ب)	تكلفة التشغيل والتصيانة (تراكمي) (ج)	فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية (د)	التكلفة الكلية (هـ) (ب+ج+د)	متوسط التكاليف الكلية (و) (هـ) ÷ (أ)
١	١٦٠٠	٦٠٠	صفر	٢٢٠٠	٢٢٠٠
٢	٢٥٠٠	١٤٠٠	٥٠	٣٩٥٠	١٩٧٥
٣	٣٠٠٠	٢٤٠٠	١٠٠	٥٥٠٠	١٨٣٣,٣
٤	٣٢٠٠	٣٨٠٠	٢٠٠	٧٢٠٠	١٨٠٠
٥	٣٦٠٠	٥٦٠٠	٣٠٠	٩٥٠٠	١٩٠٠
٦	٣٦٠٠	٧٨٠٠	٥٠٠	١١٩٠٠	١٩٨٣,٣

ومن الجدول السابق نجد أن متوسط التكاليف الكلية يبدأ في التناقص من نهاية السنة الأولى حتى يصل إلى أقل قيمة في نهاية السنة الرابعة ثم يبدأ في الارتفاع مرة أخرى.

وعلى ذلك ، فإن الإحلال الأمثل يتم عند نهاية السنة الرابعة .

الإحلال في ظل التقادم :

تكلفة التقادم هي الخسارة التي تنشأ بسبب تقادم المنتجات أو الخدمات المنتجة بواسطة الآلة ، فعند تحليل التكاليف أو المقارنة بين الآلة الجديدة والآلة الحالية يؤخذ في الاعتبار ليس الوفورات التي يمكن تخفيضها من الآلة الجديدة ، وإنما تجرى المقارنة بين التكاليف الاستثمارية للآلة الجديدة والتكلفة الاستثمارية للآلة الحالية مع الأخذ في الاعتبار تكلفة التقادم .

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

مثال (٤)

آلة تقطيع سعرها ٤٠٠٠ جنيه ، والجدول التالي يبين تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وفرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية ، وكذلك تكلفة التقادم لتلك الآلة في فترة حياتها للسنوات الست القادمة :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	٦٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	١٤٠٠	١٨٠٠	٢٢٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٢٤٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	٤٠٠	٤٠٠
فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية (تراكمي)	صفر	٥٠	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٥٠٠
فرق التكلفة بسبب التقادم (تراكمي)	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٦٠٠	٨٠٠

والمطلوب تحديد السنة المثلى لإحلال الآلة ؟:

الحل :

نكون الجدول التالي :

السنة	انقاص في سعر الآلة (ب)	تكلفة التشغيل (تراكمي) (جـ)	فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية (د)	فرق التكلفة بسبب التقادم (هـ)	التكلفة الكلية (و) (ب+جـ+د+هـ)	متوسط التكاليف (ز) (و) ÷ (أ)
(أ)						
١	١٦٠٠	٦٠٠	صفر	١٠٠	٢٣٠٠	٢٣٠٠
٢	٢٥٠٠	١٤٠٠	٥٠	٢٠٠	٤١٥٠	٢٠٧٥
٣	٣٠٠٠	٢٤٠٠	١٠٠	٣٠٠	٥٨٠٠	١٩٣٣,٣
٤	٣٢٠٠	٣٨٠٠	٢٠٠	٤٠٠	٧٦٠٠	١٩٠٠
٥	٣٦٠٠	٥٦٠٠	٣٠٠	٦٠٠	١٠١٠٠	٢٠٢٠
٦	٣٦٠٠	٧٨٠٠	٥٠٠	٨٠٠	١٢٧٠٠	٢١١٦,٧

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

ومن الجدول السابق نجد أن متوسط التكاليف الكلية يبدأ في التناقص من نهاية السنة الأولى حتى يصل إلى أقل قيمة في نهاية السنة الرابعة ثم يبدأ في الإرتفاع مرة أخرى في نهاية السنة الخامسة. وعلى ذلك ، فإن الإحلال الأمثل يتم عند نهاية السنة الرابعة.

الإحلال في ظل عدم وجود قيمة للآلة في نهاية كل سنة :

مثال (٥)

قامت شركة اتواى الجديد لتصنيع البلج الجاف بشراء آلة كبس بتكلفة قدرها ١٤٠٠٠ جنيه ، وعمرها الإنتاجي ٨ سنوات ، والآلة ليس لها قيمة في نهاية كل سنة من السنوات الثمانية علماً بأن تكاليف التشغيل : ٨٠٠ ، ١٨٠٠ ، ٢٨٠٠ ، ٣٨٠٠ ، ٤٨٠٠ ، ٥٨٠٠ ، ٦٨٠٠ ، ٧٨٠٠ جنيه على التوالي ، والمطلوب تحديد الوقت اللازم لإستبدال هذه الآلة ؟ .

الحل :

نكون الجدول التالي :

السنة	النقص في سعر الآلة	تكلفة التشغيل	تكلفة التشغيل (تراكمي)	التكلفة الكلية	متوسط التكاليف الكلية
١	١٤٠٠٠	٨٠٠	٨٠٠	١٥٦٠٠	١٥٦٠٠
٢	١٤٠٠٠	١٨٠٠	٢٦٠٠	١٨٤٠٠	٩٢٠٠
٣	١٤٠٠٠	٢٨٠٠	٥٤٠٠	٢٢٢٠٠	٧٤٠٠
٤	١٤٠٠٠	٣٨٠٠	٩٢٠٠	٢٧٠٠٠	٦٧٥٠
٥	١٤٠٠٠	٤٨٠٠	١٤٠٠٠	٣٢٨٠٠	٦٥٦٠
٦	١٤٠٠٠	٥٨٠٠	١٩٨٠٠	٣٩٦٠٠	٦٦٠٠
٧	١٤٠٠٠	٦٨٠٠	٢٦٦٠٠	٤٧٤٠٠	٦٧٧١,٤
٨	١٤٠٠٠	٧٨٠٠	٣٤٤٠٠	٥٦٢٠٠	٧٠٢٥

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

ومن الجدول السابق نجد أن أقل متوسط تكلفة كلية هي عند نهاية السنة الخامسة، وعلى ذلك، فإن الإحلال الأمثل يتم عند نهاية السنة الخامسة. الإحلال في حالتها الإقتراض وعدم الإقتراض :

مثال (٦)

قامت إحدى الشركات الصناعية بشراء آلة بسعر ١٠٠٠٠ جنيه، والجدول التالي يبين تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وسعرها في نهاية كل سنة :

السنة	١	٢	٣	٤	٥
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٥٢٠٠	٣٦٠٠	٢٤٠٠	١٦٠٠	٨٠٠
تكلفة التشغيل والصيانة	٢٥٠٠	٢٨٠٠	٣٢٠٠	٤٦٠٠	٥٠٠٠

والمطلوب تحديد فترة الإستبدال لهذه الآلة في الحالتين التاليتين :

(١) إذا كان رأس المال المستثمر في هذه الآلة غير مقترض ؟

(٢) إذا كان رأس المال المستثمر في هذه الآلة مقترض بمعدل فائدة ١٠ % ؟

الحل :

أولاً : إذا كان رأس المال المستثمر غير مقترض :

نكون الجدول التالي :

السنة	النقص في السعر السنوي	تكلفة التشغيل (تراكمي)	التكلفة الكلية	متوسط التكاليف كلية
(أ)	(ب)	(جـ)	(ب+جـ)	(د) ÷ (أ)
١	٤٨٠٠	٢٥٠٠	٧٣٠٠	٧٣٠٠
٢	٦٤٠٠	٥٣٠٠	١١٧٠٠	٥٨٥٠
٣	٧٦٠٠	٨٥٠٠	١٦١٠٠	٥٣٦٦,٧
٤	٨٤٠٠	١٣١٠٠	٢١٥٠٠	٥٣٧٥
٥	٩٢٠٠	١٨١٠٠	٢٧٣٠٠	٥٤٦٠

النقص في السعر السنوي :

السنة	النقص في السعر السنوي
١	$٤٨٠٠ = ٥٢٠٠ - ١٠٠٠٠$
٢	$٦٤٠٠ = ٣٦٠٠ - ١٠٠٠٠$
٣	$٧٦٠٠ = ٢٤٠٠ - ١٠٠٠٠$
٤	$٨٤٠٠ = ١٦٠٠ - ١٠٠٠٠$
٥	$٩٢٠٠ = ٨٠٠ - ١٠٠٠٠$

أي أن فترة الإستبدال هي نهاية السنة الثالثة في حالة عدم الإقتراض .

ثانياً : إذا كان رأس المال المستثمر مُقترض :

يتم تكوين نفس الجدول السابق مع إضافة الفائدة بمعدل ١٠ % ، علماً بأن

الفائدة تُحسب على سعر الآلة في بداية السنة على النحو التالي :

♦ فائدة السنة الأولى = $٠,١٠ \times ١٠٠٠٠ = ١٠٠٠$ جنيه

♦ فائدة السنة الثانية = $٠,١٠ \times ٥٢٠٠ = ٥٢٠$ جنيه

♦ فائدة السنة الثالثة = $٠,١٠ \times ٣٦٠٠ = ٣٦٠$ جنيه

♦ فائدة السنة الرابعة = $٠,١٠ \times ٢٤٠٠ = ٢٤٠$ جنيه

♦ فائدة السنة الخامسة = $٠,١٠ \times ١٦٠٠ = ١٦٠$ جنيه

ثم نحسب الفائدة التراكمية على النحو التالي :

♦ السنة الأولى = ١٠٠٠ جنيه

♦ السنة الثانية = ١٥٢٠ جنيه

♦ السنة الثالثة = ١٨٨٠ جنيه

♦ السنة الرابعة = ٢١٢٠ جنيه

♦ السنة الخامسة = ٢٢٨٠ جنيه

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

ثم يُضاف على التكلفة الكلية في الحالة الأولى الفائدة التراكمية على النحو التالي :

السنة	التكلفة الكلية قبل إضافة الفوائد	الفوائد التراكمية	التكلفة الكلية بعد إضافة الفوائد	متوسط التكاليف الكلية
١	٧٣٠٠	١٠٠٠	٨٣٠٠	٨٣٠٠
٢	١١٧٠٠	١٥٢٠	١٣٢٢٠	٦٦١٠
٣	١٦١٠٠	١٨٨٠	١٧٩٨٠	٥٩٩٣,٣
٤	٢١٥٠٠	٢١٢٠	٢٣٦٢٠	٥٩٠٥
٥	٢٧٣٠٠	٢٢٨٠	٢٩٥٨٠	٥٠١٦

ويتضح من الجدول السابق أن فترة الإستبدال المثلى هي نهاية السنة الرابعة في حالة إقتراض المبلغ ودفع ما عليه من فوائد .
تقدير قيمة الآلة القديمة (الحالية) رياضياً باستخدام طريقة مخصص الإهلاك المستثمر :

مخصص الاستهلاك المستثمر :

يتم حجز مبلغ ثابت من الأرباح في نهاية كل سنة من سنوات العمر الإنتاجي للأصل الثابت ، وبالتالي استثمار هذه المبالغ في أحد البنوك التجارية طبقاً لمعدل الإستثمار السائد في السوق ، بحيث تكون جملة هذه المبالغ المتساوية تعادل القيمة الهالكة من الأصل في نهاية عمره الإنتاجي . ويتم حساب مخصص الإهلاك المستثمر على النحو التالي :

مخصص الإهلاك المستثمر = م

$$= (\text{قيمة الأصل} - \text{الخردة}) \left(\frac{ع}{1 - (ع + 1)^{-ن}} \right)$$

حيث ع = معدل الفائدة ، ن = العمر الإنتاجي للأصل

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

مثال (٧)

آلة قيمتها الأصلية ٢٢٥٠٠ جنيه ، وعمرها الإنتاجي ٤ سنوات
بعدها يمكن بيعها كخردة بمبلغ ٢٥٠٠ جنيه ، وبفرض أنه تم استخدام طريقة
مخصص الإهلاك المستثمر في إستهلاك هذا الأصل وأنه أمكن استثمار
مخصص الإهلاك بمعدل فائده مركبة ٨ ٪ سنوياً ، المطلوب حساب قسط
الإستهلاك السنوي الثابت ؟

الحل :

قسط الإهلاك السنوي الثابت (مخصص الإهلاك السنوي)

$$= م = \left(\frac{ع}{1 - (ع + 1)^{-ن}} \right) (\text{قيمة الأصل} - \text{الخردة})$$

$$م. = \left(\frac{٠,٠٨}{1 - (٠,٠٨ + 1)^{-٤}} \right) (٢٥٠٠ - ٢٢٥٠٠)$$

$$م. = \frac{٠,٠٨}{1 - ٠,٣٦٠٤٨٩} \times ٢٠٠٠٠ =$$

$$= \frac{٠,٠٨}{٠,٣٦٠٤٨٩} \times ٢٠٠٠٠ =$$

$$= ٢٢١٩٢,٧ \times ٢٠٠٠٠ = ٤٤٣٨,٤٢ \text{ جنيه}$$

مثال (٨)

مصنع يمتلك آلة تنتج ٥٠٠٠ وحدة سنوياً ويُقدر عمرها الإنتاجي
بـعشر سنوات وتبلغ مصروفات تشغيلها ٢٠٠٠ جنيه سنوياً ومصاريف
صيانتها وإصلاحها ٣٠٠٠ جنيه سنوياً ، ويراد استبدالها بآلة جديدة عمرها
الإنتاجي ١٠ سنوات وقيمتها ١٠٠٠٠٠ جنيه وقدرتها الإنتاجية ١٠٠٠٠

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

وحدة سنوياً ومصروفات صيانتها وإصلاحها ٥٠٠٠ جنيه سنوياً ، فإذا كان معدل الفائدة المركبة ٨ ٪ سنوياً ، المطلوب إيجاد :

(١) تكلفة الوحدة المنتجة ؟

(٢) تقدير قيمة الآلة القديمة (الحالية) ؟

الحل :

$$١ - \text{فائدة رأس المال} = \frac{٨}{١٠٠} \times ١٠٠٠٠٠ = ٨٠٠٠ \text{ جنيه}$$

٢ - قيمة الإهلاك السنوي للآلة الجديدة

$$\text{م.م.} = \left(\frac{٠,٠٨}{1 - (٠,٠٨ + ١)} \right) ١٠٠٠٠٠$$

$$\text{م.م.} = \frac{٠,٠٨}{1 - ٢,٠٥٨٩٢٥} \times ١٠٠٠٠٠$$

$$\frac{٠,٠٨}{١,٠٥٨٩٢٥} \times ١٠٠٠٠٠ =$$

$$= ٠,٠٦٩٠٢٩ \times ١٠٠٠٠٠ = ٦٩٠٢,٩٤٩ \text{ جنيه}$$

٣ - مصروفات الصيانة والإصلاح = ٥٠٠٠ جنيه

$$\text{إجمالي تكاليف الإنتاج السنوية} = ٥٠٠٠ + ٦٩٠٢,٩٤٩ + ٨٠٠٠ =$$

$$= ١٩٩٠٢,٩٤٩ \text{ جنيه}$$

$$\text{تكلفة الوحدة المنتجة} = \frac{\text{إجمالي تكاليف الإنتاج السنوية}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}}$$

$$= \frac{١٩٩٠٢,٩٤٩}{١٠٠٠٠} = ١,٩٩ \text{ جنيه}$$

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

ويمكن تقدير الآلة القديمة على أساس ان تكلفة الوحدة المنتجة = ١,٩٩ جنيه
وبفرض أن قيمة الآلة القديمة س :

$$١- \text{فائدة رأس المال} = س \times \frac{٨}{١٠٠} = ٠,٠٨ س$$

٢- قسط الإهلاك (قيمة الإهلاك السنوي)

$$= س \left(\frac{٠,٠٨}{١ - (٠,٠٨ + ١)^{-١٠}} \right)$$

$$م. = س \times \frac{٠,٠٨}{١ - ٢,١٥٨٩٢٥}$$

$$= س \times \frac{٠,٠٨}{١,١٥٨٩٢٥}$$

$$= س \times ٠,٠٦٩٠٢٩ = ٠,٠٦٩٠٢٩ س$$

٣- مصروفات الصيانة والإصلاح = ٣٠٠٠ جنيه

٤- مصروفات التشغيل = ٢٠٠٠ جنيه

إجمالي تكاليف الإنتاج السنوية للآلة القديمة =

$$= ٠,٠٨ س + ٠,٠٦٩٠٢٩ س + ٣٠٠٠ + ٢٠٠٠$$

$$= ٥٠٠٠ + ٠,١٤٩٠٢٩٤ س$$

$$\therefore ١,٩٩ = \frac{٥٠٠٠ + ٠,١٤٩٠٢٩٤ س}{٥٠٠٠}$$

$$\therefore ٩٩٥٠ = ٥٠٠٠ + ٠,١٤٩٠٢٩٤ س$$

$$\therefore ٩٩٥٠ - ٥٠٠٠ = ٠,١٤٩٠٢٩٤ س$$

$$\therefore ٤٩٥٠ = ٠,١٤٩٠٢٩٤ س$$

$$\therefore س = \text{قيمة الآلة الجديدة} = ٣٣٢١٥ \text{ جنيه}$$

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

تمارين على الإحلال والتجديد

(١) ترغب شركة المنصورة للبلاستيك في شراء آلة للتغليف بلغت تكاليفها الإستثمارية ٥٠٠٠٠ جنيه ، وتنتك الشركة آلة قديمة وتبلغ تكاليف التشغيل السنوية للآلة القديمة وأيضاً للآلة الجديدة المزمع شراؤها على النحو التالي :

الآلة القديمة	الآلة الجديدة
٢٣٠٠٠	١٣٠٠٠
٤٠٠٠	١٠٠٠
١٠٠٠	٢٠٠٠
١٠٠٠	٣٠٠٠

فإذا علمت أن :

(١) تبلغ القيمة السوقية للآلة القديمة ٢٠٠٠٠ جنيه .

(٢) معدل تكلفة الأموال ١٥ ٪

(٣) العمر الإنتاجي للآلة القديمة ٥ سنوات وأن قيمتها كخردة في نهاية العمر الإنتاجي ٥٠٠٠ جنيه .

(٤) العمر الإنتاجي للآلة الجديدة ١٠ سنوات وأن قيمتها كخردة بعد ذلك ١٠٠٠٠ جنيه .

والمطلوب إيجاد وفر التكاليف السنوي إذا تم شراء الآلة الجديدة المقترحة ؟ .

(٢) حدد فترة الإستبدال لشركة ترغب باستبدال المعمل التابع لها والذي بلغ تكلفة شرائه ١٥٢٠٠ جنيه ، وقيمتها كخردة ٢٠٠ جنيه ، وكانت تكاليف الصيانة وسعر الآلة في نهاية كل سنة على النحو التالي :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٢٠٠	٥٠٠	٨٠٠	١٢٠٠	١٨٠٠	٢٥٠٠	٣٢٠٠	٤٠٠٠
تكلفة الصيانة	٩٠٠٠	٧٠٠٠	٥٠٠٠	٤٠٠٠	٣٠٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	٢٠٠

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

(٣) آلة كبس سعرها ٢٠٠٠ جنيه ، والجدول التالي يوضح البيانات الآتية :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٧٠٠	٩٠٠	١١٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	١٢٠٠	٧٥٠	٥٠٠	٤٠٠	٢٠٠	٢٠٠
القدرة الإنتاجية للآلة	٥٠	٤٥	٤٠	٣٥	٣٠	٢٥
فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية	صفر	٢٥	٥٠	١٠٠	١٥٠	٢٥٠

والمطلوب تحديد العمر الأمثل للإحلال ؟.

(٤) آلة لتقطيع المعادن سعرها ٨٠٠٠ جنيه ، والجدول التالي يبين البيانات الضرورية :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	١٢٠٠	١٦٠٠	٢٠٠٠	٢٨٠٠	٣٦٠٠	٤٤٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٤٨٠٠	٣٠٠٠	٢٠٠٠	١٦٠٠	٨٠٠	٨٠٠
فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية (تراكمي)	صفر	١٠٠	٢٠٠	٤٠٠	٦٠٠	١٠٠٠
فرق التكلفة بسبب التقادم (تراكمي)	٢٠٠	٤٠٠	٦٠٠	٨٠٠	١٢٠٠	١٦٠٠

والمطلوب إيجاد فترة الإحلال المثلى لهذه الآلة ؟.

بحوث العمليات

(٢) الإحلال والتجديد

(٥) آلة تبلغ تكلفتها ٩٠٠٠ جنيه وتكلفة التشغيل والصيانة السنوية ٢٠٠ جنيه للسنة الأولى وتزداد بـ ٢٠٠ جنيه سنوياً ، والمطلوب تحديد فترة الإستبدال المثلى لهذه الآلة إذا علمت أن ليس لها سعر إعادة بيع ، وعلى فرض أن عمر الآلة ثمان سنوات وأنه يمكن شراء الآلة بالإقتراض بسعر فائدة ١٠% سنوياً ؟.

(٦) قامت إحدى الشركات الصناعية بشراء آلة بسعر ٥٠٠٠ جنيه ، والجدول التالي يبين تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وسعرها في نهاية كل سنة :

السنة	١	٢	٣	٤	٥
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٢٦٠٠	١٨٠٠	١٢٠٠	٨٠٠	٤٠٠
تكلفة التشغيل والصيانة	١٢٥٠	١٤٠٠	١٦٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠

والمطلوب تحديد فترة الإحلال المثلى لهذه الآلة في الحالتين التاليتين :

١- إذا كان رأس المال المستثمر في هذه الآلة غير مُقترض ؟.

٢- إذا كان رأس المال المستثمر في هذه الآلة مُقترض بمعدل فائدة ٨ %

(٧) يرغب أحد المصانع في شراء آلة تكلفتها ١٠٠٠٠٠ جنيه وتنتج ١٠٠٠٠ وحدة سنوياً ويُقدر الخبراء عمرها الإنتاجي بعشر سنوات ، وتقدر مصروفات التشغيل والصيانة والإصلاح بمبلغ ٢٥٠٠٠ جنيه ، وبفرض أن المصنع لديه آلة قديمة عمرها الإنتاجي ٥ سنوات وتستطيع أن تنتج ٢٠٠٠ وحدة سنوياً ومصروفات تشغيلها وصيانتها وإصلاحها ٧٠٠٠ جنيه سنوياً ، فإذا كان معدل الفائدة المركبة ٩ % سنوياً ، المطلوب إيجاد قيمة الآلة القديمة ؟

الفصل الثالث

تحليل نقطة التعادل

Break-even Point Analysis

نقطة التعادل هي النقطة التي تعبر عن حجم الإنتاج الذي يتعادل عنده الإيرادات الكلية مع التكاليف الكلية ، أي هي النقطة التي يبلغ الربح عندها الصفر ، أي أنها النقطة التي لا تتحقق عندها أرباح أو خسائر .
والهدف من دراسة هذا الأسلوب هو التعرف على حجم الإنتاج وما يقابله من ربح أو خسارة ، واتخاذ القرار الرشيد في الوقت السليم ، علماً بأن حجم الإنتاج الذي يسبق هذه النقطة يحقق خسائر ، أما حجم الإنتاج بعد هذه النقطة يحقق أرباح .

وتمكننا دراستنا لهذا الأسلوب من تحقيق أمور هامة منها :

١. التعرف على القيمة الحدية للربح ، أي مقدار الربح المحقق نتيجة استغلال وحدة إضافية .
٢. التعرف على النسبة المستغلة من الطاقة للوصول إلى حجم التعادل .
٣. التعرف على درجة الأمان ، حيث :

$$\text{درجة الأمان} = \frac{\text{المبيعات} - \text{إنتاج التعادل}}{\text{الطاقة الكلية}} \times 100$$

٤. التعرف على العلاقة بين أحجام الإنتاج المختلفة وما يقابلها من ربح وخسائر .

٥. التعرف على كمية الإنتاج التي تقابل ربح معين يجب تحقيقه .

٦. المقارنة بين البدائل المختلفة عن طريق هذا الأسلوب .

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

تعريف مامة :

(١) التكاليف :

التكاليف الثابتة : هي التكاليف التي لا تتوقف على كمية الإنتاج .
التكاليف المتغيرة : هي التكاليف التي تتوقف على كمية الإنتاج ، ونجد أن :

♦ التكاليف المتغيرة الكلية (م)

$$= \text{كمية الإنتاج} \times \text{التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة}$$

$$\therefore م = ن \times م و$$

التكاليف الكلية

$$\frac{\text{التكاليف الكلية}}{\text{عدد الوحدات}} = \text{التكاليف الثابتة للوحدة}$$

$$\therefore \frac{\text{ث}}{\text{ن}} = \text{ث و}$$

♦ التكاليف الكلية (ك) = ث + (م و × ن)

فمثلاً :

إذا كانت التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٣٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة (م و) = ٥٠٠

كمية الإنتاج (ن) = ١٠٠ وحدة

$$\therefore \text{التكاليف الكلية (ك)} = \text{ث} + (\text{م و} \times \text{ن})$$

$$= ٣٠٠٠٠٠ + (١٠٠ \times ٥٠٠)$$

$$= ٣٠٠٠٠٠ + ٥٠٠٠٠ = ٣٥٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

(٢) الإيرادات :

♦ الإيراد الكلي (ر) = كمية الإنتاج (ن) × سعر الوحدة الواحدة (ع)

(٣) تحليل نقطة التعادل

بحوث العمليات

(٣) الربح :

الربح (ح) = الإيراد الكلي (ر) - التكاليف الكلية (ك)

$$= \text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين} - \left(\begin{array}{l} \text{سعر البيع} \\ \text{التكلفة المتغيرة للوحدة} \end{array} \right) - \text{التكلفة الثابتة}$$

$$= \text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين} \times \begin{array}{l} \text{هامش حد} \\ \text{المساهمة} \end{array} - \text{التكلفة الثابتة}$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{سعر البيع} \\ \text{التكلفة المتغيرة للوحدة} \end{array} \right) \times \text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين} - \left(\begin{array}{l} \text{سعر البيع} \\ \text{التكلفة المتغيرة للوحدة} \end{array} \right) \times \text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين} - \text{التكلفة الثابتة}$$

(٤) نقطة التعادل:

♦ نقطة التعادل : هي النقطة التي تتعادل عندها الإيرادات الكلية مع التكاليف الكلية ، أي هي النقطة التي يكون عندها الربح يعادل الصفر

♦ والكمية التي تنتج في مثل هذه الحالة يُطلق عليها كمية التعادل ، حيث :

التكاليف الثابتة

$$\text{كمية التعادل} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{سعر بيع الوحدة} - \text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}$$

أما قيمة التعادل (نقطة التعادل بالقيمة) يمكن حسابها على بالعلاقة التالية

التكاليف الثابتة

$$\text{قيمة التعادل} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{سعر بيع الوحدة} - \text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}$$

$$\therefore \text{نقطة التعادل بالقيمة} = \frac{\text{ث}}{\text{د} - \text{ع}}$$

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

مثال (١)

بمطومية الآتي ، المطلوب حساب نقطة التعادل بالكمية والقيمة:

♦ التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ١٥٠٠٠٠

♦ التكاليف المتغيرة للوحدة (م) = ٦٠٠ جنيه

♦ سعر بيع الوحدة = ١١٠٠ جنيه .

♦ علماً بأن المشروع يمكنه إنتاج ١٠٠٠ وحدة سنوياً ، أي أن الطاقة الكلية

(ط) = ١٠٠٠ وحدة

الحل :

(أولاً) تحديد نقطة التعادل بالكمية

$$\therefore \text{كمية التعادل} = \frac{١٥٠٠٠٠}{١١٠٠ - ٦٠٠} = ٣٠٠ \text{ وحدة}$$

وهذا يعني أنه عند إنتاج وبيع ٣٠٠ وحدة يتحقق التعادل بين الإيرادات وتكاليف الإنتاج .

(ثانياً) تحديد نقطة التعادل بالقيمة

لتحديد قيمة التعادل نقوم بالآتي :

$$\text{قيمة التعادل} = \text{كمية التعادل} \times \text{سعر بيع الوحدة (ع)}$$

$$= ١١٠٠ \times ٣٠٠ = ٣٣٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

أو يمكن استخدام العلاقة التالية مباشرة :

$$\therefore \text{نقطة التعادل بالقيمة} = \frac{\text{ث}}{\text{م} - \text{و}}$$

$$\therefore \text{نقطة التعادل بالقيمة} = \frac{١٥٠٠٠٠}{١١٠٠ - ٦٠٠} = ٣٣٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

وهو ما يعني أنه عند مبيعات قيمتها ٣٣٠.٠٠٠ جنيه يتحقق التعادل بين الإيرادات وتكاليف الإنتاج. وعلى ذلك فإن من مصلحة المشروع زيادة مبيعاته لتحقيق الهدف وهو الربحية التجارية

(٥) نسبة التعادل:

$$\text{نسبة التعادل} = \frac{\text{كمية التعادل}}{\text{الحد الأقصى للإنتاج}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{كمية التعادل}}{\text{ط}}$$

ففي المثال (١) السابق نجد أن :

$$\text{نسبة التعادل} = \frac{300}{1000} = 0,30 = 30\%$$

(٦) حد المساهمة أو نسبة المساهمة :

حد المساهمة = سعر البيع للوحدة - التكاليف المتغيرة للوحدة

$$\therefore \text{ه} = \text{ع} - \text{م} و$$

ففي المثال (١) السابق نجد أن :

$$\text{حد المساهمة} = \text{ه} = 1100 - 600 = 500$$

(٧) حجم الإنتاج المصنوع يتقو ربح معبر :

حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين =

$$= \frac{\text{التكاليف الثابتة} + \text{الربح المنشود}}{\text{سعر بيع الوحدة} - \text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}$$

$$= \frac{\text{ث} + \text{ح}}{\text{ع} - \text{م} و}$$

(٨) الزيادة المطلوبة في المبيعات لمقابلة نفقات بيع وتوزيع إضافية

الزيادة المطلوبة في المبيعات = $\frac{\text{النفقات الإضافية}}{\text{ع} - ١}$

فإذا فُرض أن نفقات البيع والتوزيع الإضافية قُدرت بمبلغ ٣٠٠٠٠ جنيه ، فما هي الزيادة المطلوبة في المبيعات لمقابلة تلك النفقات ؟

وبالرجوع لبيانات المثال (١) السابق ، نجد أن :

الزيادة المطلوبة في المبيعات = $\frac{\text{النفقات الإضافية}}{\text{ع} - ١}$

$$\therefore \text{الزيادة المطلوبة في المبيعات} = \frac{٣٠٠٠٠}{\frac{١١٠٠}{٦٠٠} - ١} = ٦٦٠٠٠ \text{ جنيه}$$

$$\therefore \text{الزيادة في كمية المبيعات} = \frac{٦٦٠٠٠}{\frac{١١٠٠}{٦٠}} = ٦٠ \text{ وحدة}$$

(٩) حد المساهمة الكلي :

حد المساهمة الكلي = المبيعات - التكاليف المتغيرة الكلية

∴ هـ الكلية = الربح + التكاليف الثابتة = ح + ث

(١٠) نسبة الطاقة المستغلة لتحقيق التعادل :

نسبة الطاقة المستغلة لتحقيق التعادل =

$$= \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{١٠٠ \times \frac{\text{الطاقة الكلية (سعر البيع - التكاليف المتغيرة للوحدة)}}{\text{نقطة التعادل}}}$$

$$= \frac{\text{ث}}{\text{ط} - \text{ع} - \text{و}} = \frac{\text{نقطة التعادل}}{١٠٠ \times \frac{\text{الطاقة الكلية}}{\text{ط} - \text{ع} - \text{و}}}$$

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

(١١) نسبة الطاقة المستغلة لتحقيق ربح معين :

نسبة الطاقة المستغلة لتحقيق ربح معين =

$$= \frac{\text{التكاليف الثابتة} + \text{الربح}}{\text{الطاقة الكلية (سعر البيع - التكاليف المتغيرة للوحدة)}} \times 100$$

$$= \frac{\text{مجموع الإنتاج الذي يحقق ربح معين}}{\text{الطاقة الكلية}} \times 100$$

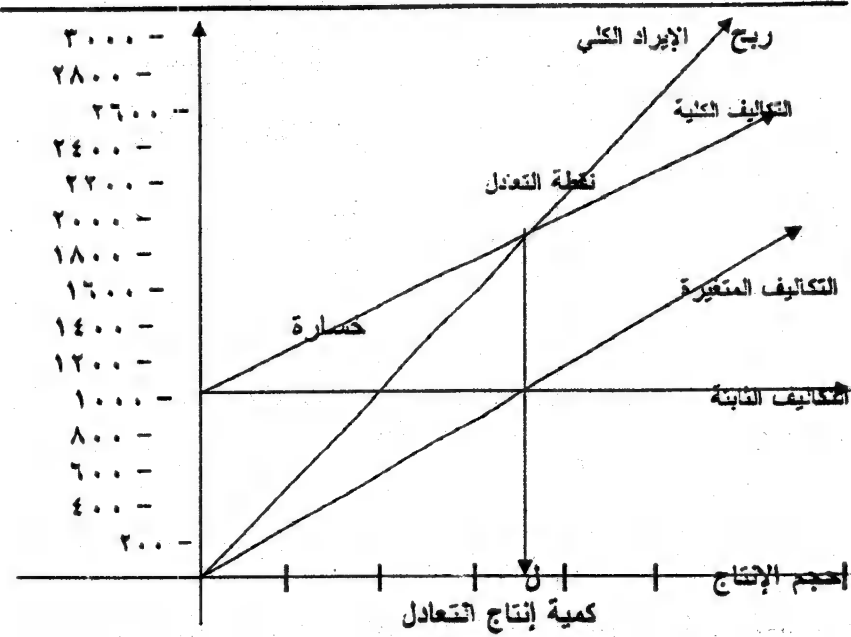
بعض الافتراضات للتعامل الجبري لأسلوب التعادل :

١. الطاقة الكلية (ط) تعبر عن الطاقة الإنتاجية ، فإذا كانت مجهولة يفترض أنها = حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين
٢. سعر البيع إذا كان مجهولاً يفترض أنه يساوي جنيه واحد بشرط أن يكون أكبر من تكلفة الوحدة المتغيرة للوحدة (م و)
٣. حجم المبيعات يساوي كمية المبيعات ويعبر عنها بالوحدات ، أما رقم المبيعات يساوي قيمة المبيعات ويعبر عنها بالجنيهات .

التعبير البياني لنقطة التعادل :

للتمثيل البياني لنقطة التعادل يتم رصد وحدات الإنتاج على المحور السيني (الأفقي) كما يتم رصد الإيرادات والتكاليف على المحور الصادي (الرأسي)، ومن نقطة تقاطع دوال الإيراد الكلي والتكاليف الكلية يتم تحديد نقطة التعادل بيانياً ، ويأخذ ذلك الشكل التالي :

بحوث العمليات (٣) تحليل نقطة التعادل



ومن الرسم السابق :

١. خط التكاليف الثابتة ظهر موازياً للمحور السيني ، حيث أن التكاليف الثابتة لا تتأثر بحجم الإنتاج.
٢. خط الإيراد الكلي بدأ من نقطة الأصل لعدم وجود إيراد إذا كان حجم الإنتاج صفراً وأن سعر البيع ثابت لا يتغير مع تغير حجم الإنتاج
٣. خط التكاليف المتغيرة بدأ من نقطة الأصل لإرتباط هذه التكاليف بوجود إنتاج ، وبالتالي ظهر تحت خط الإيراد لأن نسبة الزيادة في هذه التكاليف أقل من نسبة زيادة الإنتاج.
٤. خط التكاليف الكلية بدأ من نقطة التكاليف الثابتة في حالة عدم وجود إنتاج لأن التكاليف المتغيرة ستكون صفراً ، واتجه هذا الخط موازياً للتكاليف المتغيرة لأن الفرق بينهما ثابت ويمثل التكاليف الثابتة.

(٣) تحليل نقطة التعادل

بحوث العمليات

٥. تظهر نقطة التعادل (ل) عند تقاطع خط التكاليف الكلية مع خط الإيرادات الكلية.
٦. يلاحظ قبل الوصول للنقطة (ل) يكون خط التكاليف الكلية أعلى من خط الإيراد الكلي مما يحقق خسائر ، أما بعد نقطة التعادل نجد ان خط الإيراد الكلي أعلى من خط الإيراد الكلي أعلى من خط التكاليف الكلية فيتحقق بذلك ربح.

مثال (٢)

إذا كانت :

- ♦ التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٣٠٠٠٠٠
 - ♦ التكاليف المتغيرة للوحدة (م) = ٥٠٠٠ جنيه
 - ♦ سعر بيع الوحدة = ٦٠٠٠ جنيه .
 - ♦ الحد الأقصى لعدد الوحدات المنتجة (ن) = ٥٠٠ وحدة
- المطلوب :

- (١) تحديد نقطة التعادل جبرياً وبيانياً ؟
- (٢) تحديد نسبة التعادل ؟
- (٣) ماذا يحدث لو إرتفع سعر بيع الوحدة إلى (٧٠٠٠) جنيه ؟
- (٤) ماذا يحدث لو إنخفضت التكاليف المتغيرة للوحدة إلى (٤٠٠٠) جنيه
- (٥) ماذا يحدث لو زادت التكاليف الثابتة (٥٠٠٠٠٠) جنيه ؟

حوث العمليات

(٢) تحليل نقطة التعادل

حل :

(١) تصنيف نقطة التعادل جبرياً وبيانياً

التكاليف الثابتة

مئة التعادل = $\frac{\text{سعر بيع الوحدة} - \text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}{\text{التكاليف الثابتة}}$

$$300 = \frac{30000}{5000 - 6000}$$

١. التكاليف الكلية (ك) = ث + (و × ن)

$$= (5000 \times 300) + 30000$$

$$180000 = 150000 + 30000$$

$$180000 = 6000 \times 300 = \text{الإيرادات} = 180000 \text{ جنيه}$$

تمثيل البياني لنقطة التعادل :

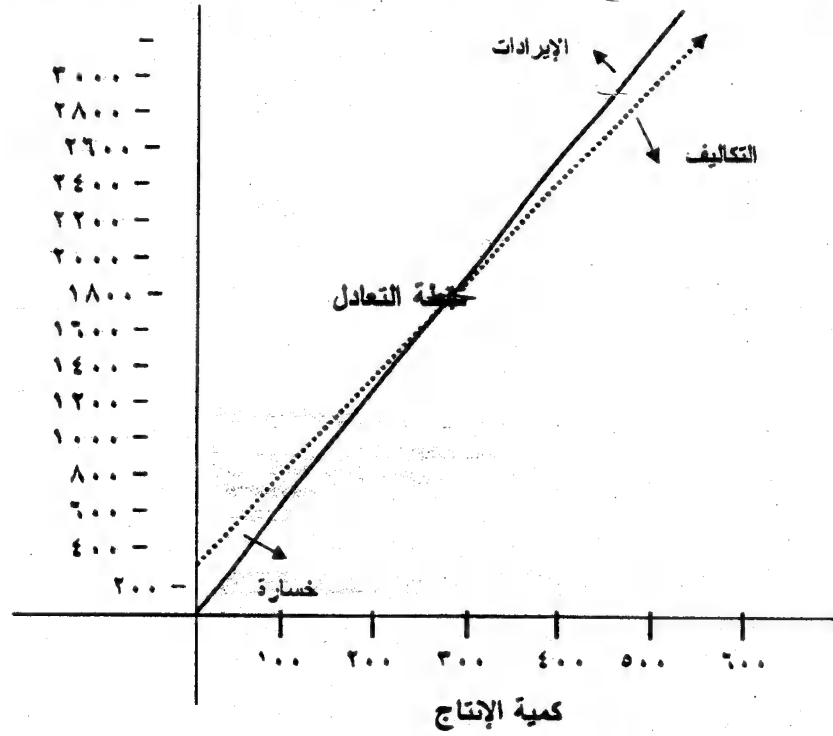
تحديد نقطة التعادل بيانياً يتم افتراض قيم للوحدات المنتجة وتحديد قيم إيرادات الكلية والتكاليف الكلية عندها كما في الجدول التالي :

عدد الوحدات (١)	الإيرادات الكلية (٢)	التكاليف المتغيرة (٣)	التكاليف الثابتة (٤)	التكاليف الكلية (٥)
	$6000 \times (١)$	$5000 \times (١)$	(٤)	(٤)+(٣)
صفر	صفر	صفر	٣٠٠٠٠	٣٠٠٠٠
١٠٠	٦٠٠٠٠	٥٠٠٠٠	٣٠٠٠٠	٨٠٠٠٠
٢٠٠	١٢٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠	١٣٠٠٠٠
٣٠٠	١٨٠٠٠٠	١٥٠٠٠٠	٣٠٠٠٠	١٨٠٠٠٠
٤٠٠	٢٤٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠	٢٣٠٠٠٠
٥٠٠	٣٠٠٠٠٠	٢٥٠٠٠٠	٣٠٠٠٠	٢٨٠٠٠٠

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

ويرسم الخانة (١) مع الخانة (٢) ينتج الخط المستقيم الممثل للإيرادات الكلية (وهو الخط المتصل في الرسم) ، ومن ناحية أخرى ، يرسم الخانة (١) مع الخانة (٥) ينتج الخط المستقيم الممثل للتكاليف الكلية (وهو الخط المنقطع)



(٢) تصميم نسبة التعادل

$$\text{نسبة التعادل} = \frac{\text{كمية التعادل}}{\text{الحد الأقصى للإنتاج}}$$

$$\therefore \text{نسبة التعادل} = \frac{300}{500} = 60\%$$

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

(٣) تصنيف التغير الميزي ينص:

♦ إذا ارتفع سعر بيع الوحدة من (٦٠٠٠) إلى (٧٠٠٠) جنيه

$$\text{كمية التعادل} = \frac{300000}{7000 - 6000} = 150 \text{ وحدة}$$

أي أن زيادة سعر بيع الوحدة يؤدي إلى انخفاض كمية التعادل (والعكس صحيح)

♦ إذا انخفضت التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة من (٥٠٠٠) إلى (٤٠٠٠) جنيه. فإن :

$$\text{كمية التعادل} = \frac{300000}{4000 - 6000} = 150 \text{ وحدة}$$

أي أن انخفاض التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة يؤدي إلى انخفاض كمية التعادل (والعكس صحيح)

♦ إذا زادت التكاليف الثابتة إلى (٥٠٠٠٠٠) جنيه ، فإن :

$$\text{كمية التعادل} = \frac{500000}{6000 - 5000} = 500 \text{ وحدة}$$

أي أن زيادة التكاليف الثابتة يؤدي إلى زيادة كمية التعادل (والعكس صحيح)
مثال (٣)

من البيانات التالية المطلوب تحديد نقطة التعادل كمياً ومالياً :

(أ) تقدر التكاليف الثابتة السنوية للمشروع بمبلغ ٢٥٠٠٠٠٠ جنيه

(ب) متوقع بيع وحدة الإنتاج بسعر ٥٠ جنيه للوحدة في حين تبلغ تكلفتها المتغيرة ٤٠ جنيه .

(استخدم هامش المساهمة للوحدة وأيضاً نسبة هامش المساهمة)

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

الحل :

هامش المساهمة للوحدة = سعر البيع للوحدة - التكاليف المتغيرة

$$هـ = ع - م = ٥٠ - ٤٠ = ١٠ \text{ جنيه}$$

نسبة هامش المساهمة = هامش المساهمة ÷ سعر البيع للوحدة

$$٠,٢ = \frac{١٠}{٥٠} =$$

تكاليف الثابتة

نقطة التعادل كمياً =

هامش المساهمة للوحدة

$$٢٥٠٠٠ = \frac{٢٥٠٠٠٠}{١٠} = \text{وحدة}$$

تكاليف الثابتة

نقطة التعادل مالياً =

نسبة هامش المساهمة

$$١٢٥٠٠٠٠ = \frac{٢٥٠٠٠٠}{٠,٢} = \text{وحدة}$$

ويمكن كذلك الوصول بضرب كمية مبيعات التعادل وهي ٢٥٠٠٠ وحدة ×

سعر بيع الوحدة وهو ٥٠ جنيه

حل آخر :

التكاليف الثابتة

نقطة التعادل كمياً =

سعر بيع الوحدة - التكاليف المتغيرة للوحدة

$$٢٥٠٠٠٠ = \frac{٢٥٠٠٠٠}{٤٠ - ٥٠} = \text{وحدة}$$

بحوث العمليّات

(٣) تحليل نقطة التعادل

$$\text{نقطة التعادل مالياً} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\frac{\text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}{\text{سعر بيع الوحدة}} - 1}$$
$$\therefore \text{نقطة التعادل مالياً} = \frac{250.000}{\frac{40}{50} - 1} = \frac{250.000}{0,2} = 1.250.000 \text{ جنيه}$$

مثال (٤)

باعتبار كل من الحالتين التاليتين حالة مستقلة المطلوب تحديد نقطة التعادل :

(أ) إجمالي التكاليف الثابتة السنوية المتوقعة لأحد المشروعات تبلغ ٤٠٠٠٠٠ جنيه ومن المنتظر بيع الوحدة من المنتج بسعر ٦٠ جنيه في الوقت الذي تبلغ فيه تكلفة الوحدة المتغيرة المقدرة ٤٠ جنيه.

(ب) إجمالي التكاليف الثابتة السنوية المتوقعة لأحد المشروعات الإستثمارية تبلغ ٧٥٠٠٠٠ جنيه كما تبلغ قيمة المبيعات المقدرة ٣٠٠٠٠٠٠ جنيه وتبلغ التكاليف المتغيرة المقدرة للمبيعات ١٨٠٠٠٠٠ جنيه.

الحل :

(أ) يمكن تقدير نقطة التعادل كمياً ومالياً :

هامش المساهمة للوحدة = سعر البيع للوحدة - التكاليف المتغيرة

$$\text{هـ} = \text{ع} - \text{م} = 60 - 40 = 20 \text{ جنيه}$$

التكاليف الثابتة

$$\text{نقطة التعادل كمياً} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{هامش المساهمة للوحدة}}$$

$$= \frac{400.000}{20} = 20.000 \text{ وحدة}$$

(٣) تحليل نقطة التعادل

بحوث العمليات

$$\text{نسبة هامش المساهمة} = \frac{٢٠}{٦٠} = \frac{١}{٣}$$

$$\text{نقطة التعادل مالياً} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{نسبة هامش المساهمة}}$$

$$= \frac{٤٠٠٠٠٠}{\frac{١}{٣}} = ١٢٠٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

(ب) غير متاح الحصول على نقطة التعادل كمياً و يمكن تقديرها مالياً حيث :

$$\text{نقطة التعادل مالياً} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{نسبة هامش المساهمة}}$$

حيث :

هامش المساهمة = قيمة المبيعات المقدرة - تكلفة المبيعات المتغيرة المقدرة

$$= ٣٠٠٠٠٠٠ - ١٨٠٠٠٠٠$$

$$= ١٢٠٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

$$\text{نسبة هامش المساهمة} = \frac{\text{هامش المساهمة}}{\text{قيمة المبيعات المقدرة}}$$

$$= \frac{١٢٠٠٠٠٠}{٣٠٠٠٠٠٠} = ٠,٤$$

وعلى ذلك يكون :

$$\text{نقطة التعادل مالياً} = \frac{٧٥٠٠٠٠}{٠,٤} = ١٨٧٥٠٠٠ \text{ جنيه}$$

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

مثال (٥)

شركة المنصورة للبلاستيك بياناتها كالتالي :

• التكاليف الثابتة = ٦٠.٠٠٠ جنيه

• حجم الإنتاج الذي يحقق ربح قدره ٤٠.٠٠٠ جنيه = ٢٠.٠٠٠ وحدة
تمثل ٥٠% من الطاقة الكلية

• الطاقة الكلية = ٤٠.٠٠٠ وحدة

والمطلوب :

(١) حساب مبيعات التعادل ؟

(٢) الربح عند كامل الطاقة؟

(٣) مستوى الطاقة المستغلة لتحقيق التعادل؟

(٤) إذا كان هناك تعديل يؤدي إلى زيادة التكاليف الثابتة بنسبة ٥٠%

وخفض التكاليف المتغيرة بنفس النسبة . هل التعديل في صالح الشركة

مع حجم إنتاج افتراضي ٢٤.٠٠٠ وحدة؟

حل :

= ٦٠.٠٠٠ ، حجم الإنتاج الذي يحقق ربح قدره ٤٠.٠٠٠ جنيه =

٢٠.٠٠٠ وحدة ، ط = ٤٠.٠٠٠ وحدة ، الربح = ح = ٤٠.٠٠٠

لأن سعر البيع غير معلوم سنفترض أن ع = ١ جنيه

نقطة التعادل = $\frac{٦٠.٠٠٠}{١ - ٠.٥}$

بيع = (سعر البيع × حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين) - (حجم الإنتاج

ي يحقق ربح معين × التكاليف المتغيرة للوحدة) - التكاليف الثابتة

التعويض في المعادلة السابقة :

$$٤٠.٠٠٠ = (٢٠.٠٠٠ \times ١) - (٢٠.٠٠٠ \times ٠.٥) - ٦٠.٠٠٠$$

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

$$\therefore 40000 = 20000 - 20000 \text{ م و } 60000 -$$

$$\therefore 20000 = 140000 - 40000 \text{ م و}$$

$$\therefore 20000 = 100000 -$$

$$\therefore \text{التكاليف المتغيرة للوحدة (م و)} = 0,5$$

$$\therefore \text{حجم التعادل كمياً} = \frac{60000}{0,5-1} = 120000 \text{ وحدة}$$

$$\blacklozenge \text{ مستوى الطاقة المستغلة لتحقيق التعادل} =$$

$$= \frac{\text{حجم التعادل}}{\text{الطاقة الكلية}} \times 100 = 100 \times \frac{120000}{40000} = 300\%$$

$$\blacklozenge \text{ الربح عند كامل الطاقة} = \text{الربح عند } 40000$$

$$= \text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين (سعر البيع - التكاليف المتغيرة) - ث}$$

$$= 60000 - (0,5-1)40000 =$$

$$= 60000 - (0,5 \times 40000) =$$

$$= 20000 - 60000 = 140000 \text{ جنيه}$$

وعلى ذلك ، يكون :

(أولاً) قبل التعديل :

$$\text{التكاليف الثابتة} = 60000$$

$$\text{التكاليف المتغيرة للوحدة (م و)} = 0,5 \text{ جنيه}$$

$$\text{حجم إنتاج افتراضي} = 240000 \text{ وحدة}$$

$$\text{الربح} = \text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين (سعر البيع - التكاليف المتغيرة) - ث}$$

$$\therefore \text{ح} = 240000 - (0,5-1)60000 =$$

$$= 120000 - 60000 = 60000 \text{ جنيه}$$

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

(ثانياً) بعد التعديل :

$$\text{التكاليف الثابتة} = ٩٠٠٠٠$$

$$\text{التكاليف المتغيرة للوحدة (م)} = ٠.٥ - (٠.٥ \times ٥٠\%) = ٠.٢٥ \text{ جنيه}$$

$$\text{حجم إنتاج افتراضي} = ٢٤٠٠٠٠ \text{ وحدة}$$

الربح = حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين (سعر البيع - التكاليف المتغيرة) - ث

$$\therefore \text{ح} = ٢٤٠٠٠٠ - (٠.٢٥ - ١) = ٩٠٠٠٠$$

$$= ٩٠٠٠٠ - ١٨٠٠٠٠ = ٩٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

وعلى ذلك نجد أن التعديل يكون في مصلحة الشركة لأنه أدى إلى زيادة أرباحها بمقدار ٣٠٠٠٠ جنيه.

مثال (٦)

تنتج شركة إيديال ثلاث أنواع من الشلجات بيانها كما يلي :

النوع	الكمية بالوحدات	سعر بيع الوحدة بالآلف ج	التكلفة المتغيرة الكلية بالآلف ج
٦ قدم	٢٠٠٠	٤	٢
٨ قدم	٤٠٠٠	٨	٦
١٢ قدم	٨٠٠٠	١٤	١٠

$$\text{وكانت التكاليف الثابتة} = ٢٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

المطلوب : حساب حجم التعادل (نقطة التعادل) وكذلك الربح المحقق إذا

زادت المبيعات بنسبة ٥٠ % ؟

الحل :

حساب المتوسط المرجح للوحدة لكل من سعر البيع والتكلفة المتغيرة على

النحو التالي :

(٢) تحليل نقطة التعادل

بحوث العمليات

النوع	الكمية ن	سعر بيع الوحدة ع	قيمة المبيعات	التكلفة المتغيرة للوحدة	التكلفة المتغيرة الكلية
٦ قدم	٢٠٠٠	٤	٨٠٠٠	٢	٤٠٠٠
٨ قدم	٤٠٠٠	٨	٣٢٠٠٠	٦	٢٤٠٠٠
١٢ قدم	٨٠٠٠	١٤	١١٢٠٠٠	١٠	٨٠٠٠٠
المجموع	١٤٠٠٠		١٥٢٠٠٠		١٠٨٠٠٠

قيمة المبيعات الكلية

سعر البيع المرجح للوحدة =
كمية المبيعات الكلية

$$= \frac{١٥٢٠٠٠}{١٤٠٠٠} = ١٠,٨٦ \text{ جنيه.}$$

التكلفة المتغيرة الكلية

التكلفة المتغيرة للوحدة المرجحة =
كمية المبيعات الكلية

$$= \frac{١٠٨٠٠٠}{١٤٠٠٠} = ٧,٧١ \text{ جنيه.}$$

$$\therefore \text{نقطة التعادل (حجم التعادل)} = \frac{\text{ث}}{\text{ع} - \text{و}} = \frac{٢٠٠٠٠}{٧,٧١ - ١٠,٨٦}$$

$$= \frac{٢٠٠٠٠}{٣,١٥} = ٦٣٤٩ \text{ وحدة}$$

وعند زيادة المبيعات بنسبة ٥٠ %

$$\text{أي : } ٩٥٢٤ = ١,٥ \times ٦٣٤٩ \text{ وحدة}$$

∴ الربح = كمية المبيعات (ع-و) - ث

$$\therefore \text{ح} = ٩٥٢٤ - (٧,٧١ - ١٠,٨٦) \times ٢٠٠٠٠$$

$$\therefore \text{ح} = ٩٥٢٤ - ٣,١٥ \times ٩٥٢٤$$

$$= ٢٠٠٠٠ - ٣٠٠٠٠,٦ = ١٠٠٠٠,٤ \text{ جنيه}$$

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

مثال (٧)

إذا توافرت لديك البيانات التالية لإحدى الشركات :

- ♦ حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين = ٢٠٠٠٠٠ وحدة
- ♦ التكاليف المتغيرة الكلية = ١٠٠٠٠٠ جنيه
- ♦ التكاليف الثابتة = ٨٠٠٠٠ جنيه
- ♦ الشركة تعمل بنصف طاقتها

والمطلوب إيجاد :

(١) نقطة التعادل ؟

(٢) معدل الأمان ؟

(٣) مستوى الطاقة المستغلة لمضاعفة الربح الحالي ؟

الحل :

$$\text{♦ نقطة التعادل} = \frac{\text{تكاليف المتغيرة الكلية (م)}}{\text{ع - م}}$$

التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة = م و = التكاليف المتغيرة الكلية ÷ حجم

الإنتاج الذي يحقق ربح معين = ١٠٠٠٠٠ ÷ ٢٠٠٠٠٠ = ٠,٥ جنيه

وطالما أن سعر البيع غير معلوم سنفترض أن ع = ١ جنيه

$$\therefore \text{نقطة التعادل} = \frac{\text{ت}}{\text{ع - م}} = \frac{٨٠٠٠٠}{٠,٥ - ١} = ١٦٠٠٠٠ \text{ وحدة}$$

$$\text{درجة الأمان} = \frac{\text{الإنتاج المباع} - \text{نقطة التعادل}}{\text{الطاقة الكلية}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٦٠٠٠٠ - ٢٠٠٠٠٠}{٤٠٠٠٠} \times ١٠٠ = ١٠\%$$

(٣) تحليل نقطة التعادل

بحوث العمليات

الربح الحالي = حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين (ع-م و) - ث

$$\therefore \text{ح} = 200000 - (1 - 0.5) \times 80000$$

$$\therefore \text{ح} = 200000 - 0.5 \times 80000$$

$$= 160000 - 80000 = 80000 \text{ جنيه}$$

$$\text{الربح المضاعف} = 2 \times 200000 = 400000 \text{ جنيه}$$

$$\text{نسبة الطاقة المستغلة لمضاعفة الربح} =$$

$$= \frac{\text{التكاليف الثابتة} + \text{الربح}}{\text{الطاقة الكلية (سعر البيع - التكاليف المتغيرة للوحدة)}} \times 100$$

$$= 100 \times \frac{80000 + 400000}{(1 - 0.5) \times 400000} = 60\%$$

ويشير ذلك أنه إذا رغبت الشركة مضاعفة ربحها الحالي عليها زيادة

استغلال طاقتها بنسبة ١٠٪ حيث أنها تستغل ٥٠٪ فقط.

تمارين على تحليل نقطة التعادل

(١) مطلوب تحديد نقطة التعادل كمياً ومالياً ، مع تحديد النقطة التي يتحقق عندها أرباح صافية قدرها ٧٥٠.٠٠٠ جنيه وذلك من واقع البيانات المتاحة التالية :

- ♦ التكاليف الثابتة سنوياً تُقدر بمبلغ ٤٥٠.٠٠٠ جنيه
- ♦ قيمة المبيعات ٢٠٠.٠٠٠ جنيه ، وبلغت تكلفة المبيعات المتغيرة ١٢٥.٠٠٠ جنيه ؟

ت سعر بيع الوحدة ٢٠ جنيه

(٢) مطلوب تحديد التكاليف الثابتة سنوياً وذلك من واقع البيانات المتاحة التالية :

- ♦ نقطة التعادل كمياً ٢٠.٠٠٠ وحدة
- ♦ قيمة المبيعات المقدرة والتكاليف المتغيرة المرتبطة بها ٢١٠.٠٠٠ جنيه ، ١٤٠.٠٠٠ جنيه على الترتيب
- ♦ حجم المبيعات ٣٥.٠٠٠ وحدة

(٣) إحسب نقطة التعادل من واقع البيانات التالية :

- ♦ التكاليف الثابتة سنوياً ١٠٠.٠٠٠ جنيه
- ♦ قيمة المبيعات ٤٠.٠٠٠ جنيه
- ♦ تكلفة المبيعات المتغيرة ١٥٠.٠٠٠ جنيه ؟
- ♦ سعر بيع الوحدة ٥٠ جنيه

وإذا رغبت المنشأة في تحقيق أرباح صافية قدرها ٩٠.٠٠٠ جنيه. فما هو حجم المبيعات اللازم لتحقيق ذلك؟

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

(٤) إحسب نقطة التعادل في الحالات التالي :

- (أ) التكاليف الثابتة ١٥٠٠٠٠ جنيه ، سعر بيع الوحدة ١٣٠٠ جنيه ، والتكلفة المتغيرة للوحدة ٨٠٠ جنيه ؟
(ب) حالة زيادة التكلفة المتغيرة ١٠٪ ، وخفض سعر البيع ١٥٪ مستخدماً البيئات في (أ) .
(جـ) إجمالي التكلفة الثابتة ١٠٠٠٠٠ جنيه ، وقيمة المبيعات المقدرة ٣٠٠٠٠٠ جنيه ، والتكلفة المتغيرة المقدرة للمبيعات ١٥٠٠٠٠ جنيه .

(٥) شركة الوفاق لإنتاج السيراميك بياناتها كالتالي :

- التكاليف الثابتة = ٣٠٠٠٠ جنيه
حجم الإنتاج الذي يحقق ربح قدره ٢٠٠٠٠ جنيه = ١٠٠٠٠٠ وحدة (تمثل ٥٠٪ من الطاقة الكلية)
الطاقة الكلية = ٢٠٠٠٠٠ وحدة

والمطلوب :

- (١) حساب مبيعات التعادل ؟
(٢) الربح عند كامل الطاقة؟
(٣) مستوى الطاقة المستقلة لتحقيق التعادل؟
(٤) إذا كان هناك تعديل يؤدي إلى زيادة التكاليف الثابتة بنسبة ٥٠٪ وخفض التكاليف المتغيرة بنفس النسبة ، هل التعديل في صالح الشركة مع حجم انتاج افتراضي ١٢٠٠٠٠ وحدة؟

بحوث العمليات

(٣) تحليل نقطة التعادل

(٦) تنتج إحدى الشركات ٣ أنواع من صبغات الشعر للسيدات بـ ١٠٠٠٠ وحدة كما يلي:

النوع	الكمية بالوحدات	سعر بيع الوحدة	التكلفة المتغيرة للوحدة
أ	٥٠٠	٣	١
ب	١٠٠٠	٤	٦
ج	٢٠٠٠	٥	٨

وكانت التكاليف الثابتة = ٨٠٠٠ جنيه

المطلوب : حساب نقطة التعادل وكذلك الربح المحقق إذا زادت المبيعات بنسبة ٧٥ % ؟

(٧) شركة روتانا كانت بياناتها كما يلي :

♦ حجم الإنتاج لربح معين = ٣٠٠٠٠٠ وحدة

♦ التكاليف المتغيرة الكلية = ١٥٠٠٠٠ جنيه

♦ التكاليف الثابتة = ٢٤٠٠٠٠ جنيه

والمطلوب إيجاد :

١- نقطة التعادل ؟

٢- معدل الأمان ؟

٣- مستوى الطاقة المستغلة لمضاعفة الربح الحالي؟ علماً بأن

الشركة تعمل بنصف طاقتها.

(٨) إذا كانت التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٥٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة (م) = ٦٠٠٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = ٩٠٠٠ جنيه .

الحد الأقصى للإنتاج = ٦٠٠ وحدة

المطلوب : تحديد نقطة التعادل ونسبة التعادل ؟

الفصل الرابع

نظرية اتخاذ القرارات

Decisions Making Theory

لقد أصبح الإحصاء الآن علم اتخاذ القرارات في مواجهة عدم توافر المعلومات الكافية ، والمؤسسات التي لا تعتمد على الأسلوب الإحصائي في اتخاذ قراراتها تجاه مشكلة معينة تصاب بالفشل الذريع ، فالإدارة في العصر الحديث قد تغير مفهومها القديم الإجهادي إلى أسلوب علمي منظم يعتمد على ذوي الكفايات للقيام بإدارة المؤسسات والشركات حتى تصل بالمجتمع إلى التقدم والرفي ، فيمكن لمنشأة أن تستخدم الأساليب الإحصائية للوصول إلى غايتها في اتخاذ القرارات التجارية الخاصة ببيع وشراء المنتجات وتحديد أجور العاملين بها وكذلك شراء الأصول الثابتة ، إلخ . وباستخدام العينات تستطيع الشركة أو المؤسسة معرفة خواص ومعالم المجتمع مما يمكنها من توفير الوقت والجهد وانتكاليف في اتخاذ قراراتها التجارية .

القرار الإحصائي : اختيار خطة من مجموعة من الخطط الممكن تنفيذها عملياً والتي تعطي أكبر القيم المتوقعة ، أي التي تعطي أحسن النتائج ، والذي يقوم باتخاذ القرارات هو مدير المؤسسة ويقوم بعملية التنفيذ مدير آخر يعاونه قوة من الموظفين . فعند اتخاذ قرار بمشكلة معينة تحدد الخطط الممكن تنفيذها عملياً مثل الخطط أ ، ب ، أ ، ب ، أ ، ب ، ... ، وهذه الخطط متنافية فيما بينها وتكون خاضعة لرقابة متخذ القرارات ، وتكون لا تخالف السياسة العامة للشركة أو قوانين الدولة أو الآداب العامة ، ثم تجمع بيانات عن هذه الخطط تؤدي إلى معرفة نتائج كل خطة ، وبعد ذلك يتخذ القرار باختيار الخطة المناسبة التي تحقق غرض المنشأة ، أي الخطة التي تعطي أحسن النتائج المرغوب فيها .



حالات الطبيعة :

هناك عوامل خاضعة لرقابة متخذ القرار مثل موارد الشركة ، ولكن هناك عوامل أخرى ليست خاضعة لرقابة متخذ القرار ، وهذه العوامل تسمى حالات الطبيعة مثل الرواج والكساد أو حالات الجو أو ... إلخ

فهذه الحالات ليست خاضعة لرقابة متخذ القرار ، ويجب عليه أن يأخذ في الحسبان جميع حالات الطبيعة لكل خطة ، وعلى ذلك يمكن تصوير عملية اتخاذ القرارات في صورة مصفوفة رياضية ، والمصفوفة الرياضية عبارة عن صفوف وأعمدة مكونة من أرقام مرتبة ترتيباً رأسياً وأفقياً ، فتوضيح الخطط الممكنة في الصفوف مرتبة أيضاً وحالات الطبيعة في الأعمدة ، أما الأرقام داخل هذه المصفوفة فتتمثل بقياس المنفعة الناتجة عن خطة معينة وحالة من حالات الطبيعة ، فإذا كان لدينا ثلاث خطط A_1, A_2, A_3 ، وثلاث حالات طبيعة P_1, P_2, P_3 ، وقياس المنفعة F_{ij} ، فـ $F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33}$.

حالات الطبيعة

	P_1	P_2	P_3	
A_1	F_{11}	F_{12}	F_{13}	
A_2	F_{21}	F_{22}	F_{23}	الخطط
A_3	F_{31}	F_{32}	F_{33}	

ويقوم متخذ القرار باختيار خطة واحدة من بين هذه الخطط ، وهو يعتمد في ذلك على الخبرة الماضية والحاضرة للتنبؤ بالنتائج الخاصة بكل خطة ، لأن نتيجة هذه الخطط متقلبة ولا يمكن التنبؤ بما سيحصل فعلاً بسبب عدم وجود معلومات كافية بما سيحدث مستقبلاً .

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

النماذج المستخدمة لاتخاذ القرارات :

نموذج التأكد : وفيه يعرف متخذ القرارات بالتأكد حالة الطبيعة ستحدث في المستقبل ويختار الخطة التي تعطي أكبر منفعة متوقعة ، أي يوجد في المصفوفة الرياضية عمود واحد فقط يمثل حالات الطبيعة .

الخطة	المنفعة المتوقعة (في حالة تأكد تام)
أ _١	٤٠٠٠
أ _٢	٥٠٠٠
أ _٣	٢٠٠٠

وفي هذا النموذج يختار متخذ القرار الخطة التي أمامها أكبر رقم في عمود حالات الطبيعة ، وفي مثالنا السابق يختار الخطة الثانية أ_٢.

نموذج المناظرة : وفيه يعرف متخذ القرارات احتمال حدوث كل حالة من حالات الطبيعة ويختار الخطة التي تعطي أكبر القيم للمنفعة أو أقل خسارة متوقعة .

مثال (١)

محلات السلام ترغب في معرفة عدد صناديق الشاي الواجب الاحتفاظ بهما لمقابلة طلبات الأسبوع القادم ، ومن الخبرة السابقة تبين أن التوزيع الاحتمالي للمبيعات كما يلي :

عدد صناديق الشاي	١٠	١١	١٢	١٣
الاحتمال	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

فإذا كان سعر بيع الصندوق ٨ جنيهات وسعر تكلفة الصندوق ٦ جنيهات ، والمنتجات التي لا تباع أثناء الأسبوع تصبح لا قيمة لها .

١. احسب المبيعات المتوقعة لهذا الأسبوع؟ :

٢. ما هو القرار الأمثل للكمية الواجب الاحتفاظ بها؟ :

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

الحل :

$$١- \text{المبيعات المتوقعة} = ٠,٢ \times ١٠ + ٠,٣ \times ١١ + ٠,٤ \times ١٢ + ٠,١ \times ١٣$$

$$= ١١,٤$$

٢- تحدد الأرباح الشرطية في مصفوفة رياضية كالآتي :

الطلبات المتوقعة

ط, ط, ط, ط, ط,

$$[١٠ \quad ١١ \quad ١٢ \quad ١٣]$$

$$\begin{pmatrix} ٢٠ & ٢٠ & ٢٠ & ٢٠ \\ ٢٢ & ٢٢ & ٢٢ & ١٤ \\ ٢٤ & ٢٤ & ١٦ & ٨ \\ ٢٦ & ١٨ & ١٠ & ٢ \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{تخزين : ١٠} \\ \text{تخزين : ١١} \\ \text{تخزين : ١٢} \\ \text{تخزين : ١٣} \end{matrix}$$

إيجاد القيم المتوقعة للأرباح الشرطية للخطط المختلفة :

$$\text{ق٠م (أ)} = ٠,٢ \times ٢٠ + ٠,٣ \times ٢٠ + ٠,٤ \times ٢٠ + ٠,١ \times ٢٠$$

$$= ٢٠ = ٢ + ٨ + ٦ + ٤ =$$

$$\text{ق٠م (ب)} = ٠,٢ \times ٢٢ + ٠,٣ \times ٢٢ + ٠,٤ \times ٢٢ + ٠,١ \times ٢٢$$

$$= ٢٠,٤ = ٢,٢ + ٨,٨ + ٦,٦ + ٢,٨ =$$

$$\text{ق٠م (ج)} = ٠,٢ \times ٢٤ + ٠,٣ \times ١٦ + ٠,٤ \times ٢٤ + ٠,١ \times ٢٤$$

$$= ١٨,٤ = ٢,٤ + ٩,٦ + ٩,٨ + ١,٦ =$$

$$\text{ق٠م (د)} = ٠,٢ \times ٢٦ + ٠,٣ \times ١٠ + ٠,٤ \times ١٨ + ٠,١ \times ٢٦$$

$$= ١٣,٢ = ٢,٦ + ٣ + ٧,٢ + ٠,٤ =$$

القرار الأمثل للكمية الواجب الاحتفاظ بها هو ١١ صندوق من الشاي حيث أن

الخطوة الثانية تعطي أكبر قيمة متوقعة وهي ٢٠,٤

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

ويمكن عمل مصفوفة رياضية لفرص الخسارة الشرطية هي كمية المخزون الزائد عن حاجة الطلب ، كذلك الأرباح التي لم تتحقق لعدم تخزين الصناديق الكافية لمقابلة الطلب .

الطلبات المتوقعة

	ط _١	ط _٢	ط _٣	ط _٤
	١٠	١١	١٢	١٣
	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١
تخزين ١٠ : أ١	صفر	٢	٤	٦
تخزين ١١ : أ١	٦	صفر	٢	٤
تخزين ١٢ : أ٢	١٢	٦	صفر	٢
تخزين ١٣ : أ٢	١٨	١٢	٦	صفر

$$\text{ق م (أ١)} = \text{صفر} \times ٠,٢ + ٢ \times ٠,٣ + ٤ \times ٠,٤ + ٦ \times ٠,١ =$$

$$\boxed{٢,٨} = \text{صفر} + ٠,٦ + ١,٦ + ٠,٦ =$$

$$\text{ق م (أ٢)} = ٠,٢ \times ٦ + \text{صفر} \times ٠,٣ + ٢ \times ٠,٤ + ٤ \times ٠,١ =$$

$$\boxed{٢,٤} = ١,٢ + \text{صفر} + ٠,٨ + ٠,٤ =$$

$$\text{ق م (أ٣)} = ٠,٢ \times ١٢ + ٠,٣ \times ٦ + \text{صفر} \times ٠,٤ + ٢ \times ٠,١ =$$

$$\boxed{٤,٤} = ٢,٤ + ١,٨ + \text{صفر} + ٠,٢ =$$

$$\text{ق م (أ٤)} = ٠,٢ \times ١٨ + ٠,٣ \times ١٢ + ٠,٤ \times ٦ + \text{صفر} \times ٠,١ =$$

$$\boxed{٩,٦} = ٣,٦ + ٣,٦ + ٢,٤ + \text{صفر} =$$

القرار الأمثل للكمية الواجب الاحتفاظ بها هو ١١ صندوق من الشاي حيث أن الخطوة الثانية تعطي أقل خسارة متوقعة وهي ٢,٤

بحوث العمليات (٤) نظرية اتخاذ القرارات

نموذج عدم التأكد : وفيه يجهل متخذ القرارات احتمال حدوث كل حالة من حالات الطبيعة حيث أنه لا يوجد أساس يمكن الاعتماد عليه من الخبرة السابقة لتقدير هذه الاحتمالات .

ويستعان ببعض المقاييس الآتية :

١. مقياس التشاؤم (أكبر الأقل)
٢. مقياس التفاؤل (أكبر الأكبر)
٣. مقياس الأسف (أقل الأكبر)
٤. متساوي الاحتمالات

مثال (٢)

إذا كان لدينا المصفوفة الرياضية التالية :

$$\begin{matrix} & \text{ط}_1 & \text{ط}_2 & \text{ط}_3 \\ \begin{matrix} \text{أ}_1 \\ \text{أ}_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 20 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

فما هو القرار الواجب اتخاذه ؟

الحل :

١- مقياس التشاؤم : (أكبر الأقل) :

وفي هذه الحالة ينظر متخذ القرار إلى المستقبل نظرة تشاؤمية أي أن الحالة التي ستسود مستقبلاً ستكون أسوأ الحالات . ويمكن ترتيب هذه النتائج كالآتي :

الخطة	أسوأ الحالات (أقل الأرباح)
أ _١	١-
أ _٢	١

وطبقاً لهذا المقياس فإن متخذ القرار يختار أكبر أقل الأرباح ، ويساوي ١ ، أي سيختار الخطة الثانية أ_٢

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

بحوث العمليات

٢- مقياس التفاؤل : (أكبر الأكبر) :

وفى هذه الحالة ينظر متخذ القرار إلى المستقبل بتفاؤل تام أي أن الحالة التي ستسود مستقبلاً ستكون أحسن الحالات . ويمكن ترتيب هذه النتائج كالآتي:

الخطة	أحسن الحالات (أكبر الأرباح)
أ١	٢٠
أ٢	١٠

وطبقاً لهذا المقياس فإن متخذ القرار يختار أكبر أكبر الأرباح ، ويساوي ٢٠ ، أي سيختار الخطة الأولى أ١ ، ولكن هرويز قال أنه لا يجب أن يكون متخذ القرار متفائلاً تفاولاً تاماً ، وعدل المقياس السابق بإدخال فكرة معامل التفاؤل بأن يأخذ متخذ القرار أكبر وأقل القيم في المصفوفة الرياضية وأن يرجح كل حالة طبقاً لتقديره للتفاؤل ، فإذا فرضنا ان معامل التفاؤل ٠,٨ ، فإنه في هذه الحالة نوجد القيمة المتوقعة لكل خطة كما يلي :

الخطة	الأكبر (احتمال ٠,٨)	الأقل (احتمال ٠,٢)
أ١	٢٠	١-
أ٢	١٠	١

والقيم المتوقعة للخطين ستكون كما يلي :

$$ق٠ م (أ١) = ٠,٨ \times ٢٠ + ٠,٢ \times (١-) =$$

$$= ١٦ - ٠,٢ = ١٥,٨$$

$$ق٠ م (أ٢) = ٠,٨ \times ١٠ + ٠,٢ \times ١ =$$

$$= ٨ + ٠,٢ = ٨,٢$$

وطبقاً لهذا المقياس يجب على متخذ القرار أن يختار الخطة التي تحقق أكبر قيمة متوقعة وهي الخطة الأولى أ١.

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

٣- مقياس الأسف :

وفي هذه الحالة يتم إنشاء مصفوفة للأسف لإيجاد مقدار الأسف الذي تشعر به الشركة نتيجة لاختيار خطة معينة ثم حدوث حالة طبيعية فعلاً ، فمثلاً إذا سارت حالة الطبيعة الأولى وقد اختارت المؤسسة فعلاً الخطة الأولى فإنها لن تشعر بأي أسف ، أما إذا سارت حالة الطبيعة الثانية وقد اختارت المؤسسة فعلاً الخطة الأولى فإنها تشعر بأسف مقداره ٢٥ ، وهكذا يظهر ذلك في مصفوفة الأسف التالية :

	ط _١	ط _٢	ط _٣
أ _١	صفر	٢	٢
أ _٢	١٠	صفر	صفر

وطبقاً لمقياس أكبر الأقل فإن متخذ القرار سينظر إلى المستقبل بتشاورم بالغ ، ولذا فإنه سيختار الخطة التي تناظر أقل أسوأ الحالات (أقل الأكبر) ، ويمكن ترتيب هذه النتائج كالآتي :

الخطة	أسوأ الحالات (أكبر الأسف)
أ _١	٢
أ _٢	١٠

وطبقاً لهذا المقياس يجب على متخذ القرار أن يختار الخطة التي تعطيه أقل قيم أسوأ الحالات وهي تسوي ٢ ، وعلى ذلك سيختار الخطة الأولى أ_١ .

٤- مقياس تساوي الاحتمالات :

في حالة جهل متخذ القرار عن احتمال وقوع حالة معينة من حالات الطبيعة فإنه يفترض احتمال متساوي لجميع الحالات ، وعلى ذلك يقوم بإيجاد القيمة المتوقعة لكل خطة ثم يختار الخطة التي تعطيه أكبر قيمة متوقعة كما يلي (على أساس أن احتمال كل حالة من حالات الطبيعة = $\frac{1}{3}$)

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

$$ق٠ م (أ) = \frac{1}{3} \times (1-) + \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 20 =$$

$$\boxed{7,33} = 0,33 - 1 + 6,67 =$$

$$ق٠ م (أ) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{3} \times 10 =$$

$$\boxed{5,33} = 0,33 + 1,67 + 3,33 =$$

أي أن متخذ القرار أن سيختار الخطة التي تعطيه أكبر قيمة متوقعة وهي الخطة الأولى أ،

مثال (٣)

الشركة المصرية للاستثمارات بالمنصورة قررت استثمار مبلغ مليون جنيه في أحد المشروعات التالية ، فقامت الإدارة بجمع المعلومات التالية عن ثلاث مشروعات قابلة للتنفيذ وهي :

☒ المشروع الأول : تقوم الشركة بشراء قطعة أرض في منطقة ساحلية بهدف بيعها بعد عام للمستثمرين في القرى السياحية ويتوقف ثمن البيع على الحالة الاقتصادية التي ستسود في وقت البيع ، فإذا كانت الحالة الاقتصادية في رواج فإن الشركة يمكنها بيع الأرض بمبلغ ١,٨ مليون جنيه ، أما إذا بقيت الحالة الاقتصادية على وضعها الحالي فإن الشركة تباع الأرض بمبلغ ٩٠٠٠٠٠ جنيه ، أما في حالة الكساد الاقتصادي فإن الشركة تباع الأرض بمبلغ ٥٠٠٠٠٠ جنيه .

☒ المشروع الثاني : تقوم الشركة بشراء بضاعة تتمثل في قطع غيار السيارات لتخزينها ثم بيعها بعد عام ، فإذا كانت الحالة الاقتصادية في رواج فإن الشركة يمكنها البيع بمبلغ ١,١٣٥ مليون جنيه ، وإذا بقيت الحالة الاقتصادية مستقرة كما هي الآن فإن الشركة يمكنها البيع بمبلغ ١,٠٩ مليون جنيه ، أما في حالة الكساد الاقتصادي فإن ثمن البيع سيكون ١,٠٦ مليون جنيه .

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

☒ المشروع الثالث : تقوم الشركة بشراء سندات حكومية بسعر فائدة ثابت قدره ٨% سنوياً وتستثمر فيه كز المبلغ المتاح لديها .
فإذا اجتمع مجلس إدارة الشركة لاتخاذ قرار بشأن طرق استثمار مبلغ مليون جنيه ، فما هو القرار الأمثل الذي يمكن اتخاذه ؟
الحل :

يمكن تلخيص البيانات الخاصة بهذا المثال في مصفوفة أرباح في ظل حالات الطبيعة (الرواج ط_١ ، والإستقرار ط_٢ ، والكساد ط_٣) على النحو التالي :

الخطة	حالات الطبيعة		
	ط _١	ط _٢	ط _٣
أ	٨٠٠	١٠٠-	٥٠٠-
أ	١٣٥	٩٠	٦٠
أ	٨٠	٨٠	٨٠

إختيار الطريقة التي تُستخدم قبل اتخاذ القرار وهي :

- ١- طريقة التفاؤل التام
- ٢- طريقة التشاؤم
- ٣- طريقة درجة التفاؤل (معيار هرويز) وليكن معامل التفاؤل ٠,٤ مثلاً
- ٤- طريقة الأسف
- ٥- طريقة تساوي الإحتمالات (لابلاس)
- ١- طريقة التفاؤل : (أكبر الأكبر) :

الخطة	أحسن الحالات (الأكبر)
أ	٨٠٠
أ	١٣٥
أ	٨٠

وتكون الخطة الواجبة التنفيذ هي الخطة الأولى أ ، أي أكبر الأكبر ، أي شراء الأرض .

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

بحوث العمليات

٢- طريقة التشاؤم : (أكبر الأقل) :

الخطة	أسوأ الحالات (الأقل)
١	٥٠٠ -
٢	٦٠
٣	٨٠

وتكون الخطة الواجبة التنفيذ هي الخطة الثالثة أ٣ ، أي أكبر الأقل ، أي شراء سندات حكومية .

٣- طريقة درجة التأول (٠,٤) :

الخطة	أحسن الحالات (٠,٤)	أسوأ الحالات (٠,٦)
١	٨٠٠	٥٠٠ -
٢	١٣٥	٦٠
٣	٨٠	٨٠

والقيم المتوقعة للخطط الثلاث ستكون كما يلي :

$$ق١ = ٠,٦ \times (٥٠٠ -) + ٠,٤ \times ٨٠٠ = (١) = ٢٠$$

$$ق٢ = ٠,٦ \times ٦٠ + ٠,٤ \times ١٣٥ = (٢) = ٩٠$$

$$ق٣ = ٠,٦ \times ٨٠ + ٠,٤ \times ٨٠ = (٣) = ٨٠$$

وتكون الخطة الواجبة التنفيذ هي الخطة الثانية أ٢ ، لأنها تمثل أكبر قيمة متوقعة ، أي شراء البضاعة .

٢- طريقة الأسف :

إنشاء مصفوفة الأسف :

حالات الطبيعة			الخطط
ط١	ط٢	ط٣	
أ١	صفر	١٩٠	٥٨٠
أ٢	٦٦٥	صفر	٢٠
أ٣	٧٢٠	١٠	صفر

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

الخطة	أكبر الأسف
أ١	٥٨٠
أ٢	٦٦٥
أ٣	٧٢٠

وتكون الخطة الواجبة التنفيذ هي الخطة الأولى أ١ ، أي شراء الأرض ، لأنها أقل أسف (أقل الأكبر) .

٥- طريقة تساوي الاحتمالات :

نعطي لكل حالة احتمال قدره $\frac{1}{3}$ وعلى ذلك يقوم بإيجاد القيمة

المتوقعة لكل خطة كما يلي :

والقيم المتوقعة للخطط الثلاث ستكون كما يلي :

$$\begin{aligned} \text{ق}٠ \text{م} (أ١) &= \frac{1}{3} = (٥٠٠ - ١٠٠ - ٨٠٠) = ٦٦,٦٧ \\ \text{ق}٠ \text{م} (أ٢) &= \frac{1}{3} = (٦٠ + ٩٠ + ١٣٥) = ٩٥ \\ \text{ق}٠ \text{م} (أ٣) &= \frac{1}{3} = (٩٠ + ٨٠ + ٨٠) = ٨٠ \end{aligned}$$

وسنجد أن أكبر قيمة متوقعة هي ٩٥ وهي تصاحب الخطة الثانية ، وعلى ذلك يكون القرار المناسب هو تنفيذ الخطة أ١ ، وهو شراء بضاعة .

مثال (٤)

إذا كان التوزيع الاحتمالي لبيع أحد الكتب في مكتبة الجلاء الجديدة بالمنصورة على النحو التالي:

عدد الكتب	١٠	١٥	٢٠
الاحتمال	٠,٢	٠,٥	٠,٣

وتقوم المكتبة بشراء النسخة من الناشر بمبلغ ٣ جنيهات ويتم بيعها بمبلغ ٥ جنيهات ، والنسخة التي لا تباع تُرد للناشر وتحصل المكتبة على مبلغ ٢ جنيه للنسخة ، والمطلوب إيجاد السياسة المثلى التي يمكن للمكتبة اتخاذها؟ .

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

الحل :

تسعى المكتبة إلى تحقيق أكبر عائد ممكن ، وأمام البائع ثلاث سياسات (خطط أو استراتيجيات) :

⊗ أ : شراء ١٠ نسخ وعرضها للبيع .

⊗ أم : شراء ١٥ نسخة وعرضها للبيع .

⊗ أم : شراء ٢٠ نسخة وعرضها للبيع .

ولتحديد أي سياسة عنى المكتبة تحديد العائد المحتمل عن كل سياسة مع مواجهة حالات الطبيعة وهي :

⊗ ط : حالة اتبيع باحتمال ٠,٢

⊗ طم : حالة اتبيع باحتمال ٠,٥

⊗ طم : حالة اتبيع باحتمال ٠,٣

ويحسب العائد كما يلي :

العائد = (عدد الوحدات المباعة × ثمن البيع) + (عدد الوحدات المردودة × ثمن المسترد) - (عدد الوحدات المشتراة × ثمن الشراء)

(١) عند اتخاذ سياسة بشراء ١٠ نسخ من الكتاب لبيعها :

⊗ العائد عند ط = $5 \times 10 + 2 \times 0 - 3 \times 10 = 20$ جنيه

⊗ العائد عند طم = $5 \times 10 + 2 \times 0 - 3 \times 10 = 20$ جنيه

⊗ العائد عند طم = $5 \times 10 + 2 \times 0 - 3 \times 10 = 20$ جنيه

(٢) عند اتخاذ سياسة بشراء ١٥ نسخة من الكتاب لبيعها :

⊗ العائد عند ط = $5 \times 10 + 2 \times 5 - 3 \times 15 = 15$ جنيه

⊗ العائد عند طم = $5 \times 15 + 2 \times 0 - 3 \times 15 = 30$ جنيه

⊗ العائد عند طم = $5 \times 15 + 2 \times 0 - 3 \times 15 = 30$ جنيه

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

(٣) عند اتخاذ سياسة بشراء ٢٠ نسخة من الكتاب لبيعها :

☒ العائد عند ط_١ = ٥ × ١٠ + ٢ × ١٠ - ٣ × ٢٠ = ١٠ جنيه

☒ العائد عند ط_٢ = ٥ × ١٥ + ٢ × ٥ - ٣ × ٢٠ = ٢٥ جنيه

☒ العائد عند ط_٣ = ٥ × ٢٠ + ٢ × صفر - ٣ × ٢٠ = ٤٠ جنيه

جدول العائد (الأرباح) :

الخطة	الاحتمالات وحالات الضيقة		
	أ _١	أ _٢	أ _٣
ط _١	٢٠	٢٠	٢٠
ط _٢	٣٠	٣٠	١٥
ط _٣	٤٠	٢٥	١٠

والقيم المتوقعة للخطط الثلاث ستكون كما يلي :

ق_١م للخط (أ_١) = ٠,٣ × ٢٠ + ٠,٥ × ٢٠ + ٠,٢ × ٢٠ = ٢٠

ق_٢م للخط (أ_٢) = ٠,٣ × ٣٠ + ٠,٥ × ٣٠ + ٠,٢ × ١٥ = ٢٧

ق_٣م للخط (أ_٣) = ٠,٣ × ٤٠ + ٠,٥ × ٢٥ + ٠,٢ × ١٠ = ٢٦,٥

وسنجد أن أكبر قيمة متوقعة هي ٢٧ وهي تصاحب الخطة الثانية ، وعلى ذلك يكون القرار المناسب هو تنفيذ الخطة أ_٢ وهو شراء ١٥ نسخة.

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

تمارين على نظرية اتخاذ القرارات

(٠) إذا كان توزيع الطلب لمنتج معين لليوم التالي لشركة النصر يمثلته التوزيع التالي :

الطلب	١٤	١٥	١٦
الإحتمال	٠,٢	٠,٥	٠,٣

- فإذا كان ربح القطعة المنتجة هو ٥ جنيهات وسعر بيعها ٩ جنيهات ،
والمنتجات التي لا تباع في اليوم التالي تصبح لا قيمة لها . فالمطلوب :
١. إحصاء المبيعات المتوقعة لهذا اليوم؟
 ٢. ما هو القرار الأمثل للكمية الواجب الاحتفاظ بها؟

(٢) إذا كان لدينا المصفوفة الرياضية التالية :

	ط _١	ط _٢	ط _٣
الخطط	أ _١	أ _٢	أ _٣
	١٣	١٤	٤-
	٥	٠	٦
	٣	٤	٥

فما هو القرار الواجب اتخاذه في الحالات التالية :

- ١- طريقة التفاؤل التام
- ٢- طريقة التشاؤم
- ٣- طريقة التفاؤل بافتراض معامل التفاؤل ٠,٧
- ٤- إذا كانت الإحتمالات الخاصة بحالات الطبيعة على الترتيب هي : ٠,٧ ، ٠,١ ، ٠,٢
- ٥- طريقة الأسف .
- ٦- طريقة تساوي الإحتمالات .

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

(٣) أحد دور الصحف ترغب في معرفة عدد المجلات المناسب طبعها في أسبوع ، ومن الخبرة السابقة وعلى أساس تحليل إحصائيات المبيعات تبين أن التوزيع الإحتمالي لمبيعات المجلة كان كما يلي :

عدد المجلات لأقرب ألف	١٠	١١	١٢	١٣
الإحتمال	٠,١	٠,٢	٠,٤	٠,٣

- وبفرض أن سعر بيع العدد من المجنة ٥ جنيه وأن تكلفة العدد ٣ جنيهات ، وأن الإعداد التي لا تباع خلال الأسبوع تصبح لا قيمة لها. المطلوب :
١. إحسب المبيعات المتوقعة لهذا الأسبوع؟
 ٢. ما هو القرار الأمثل للكمية الواجب الاحتفاظ بها؟

(٤) منتج أمامه أن ينتج ٣ أنواع من المنتجات أ_١ ، أ_٢ ، أ_٣ ، ٣ حالات طبيعة الرواج ط_١ ، والإستقرار ط_٢ ، والكساد ط_٣ ، وقدر هذا المنتج أن المصفوفة التي تمثل أرباحه وخسائره بآلاف الجنيهات على النحو التالي :

حالات الطبيعة الخط	حالات الطبيعة		
	ط _١	ط _٢	ط _٣
أ _١	٣٠	١٠	٤-
أ _٢	٢٠	٩	٢-
أ _٣	١٥	٧	١

ولكي يقرر المنتج أي الأنواع يحقق إنتاجها أكبر ربح ممكن يكون لديه ٤ مقاييس .

المطلوب : ما هي المقاييس التي يستخدمها لتحديد أكبر ربح ممكن؟

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

(٥) إذا توافرت لديك البيانات الجدولية التالية :

جدول تكلفة :

ط		تبدل		
ط _١	ط _٢	ط _٣	ط _٤	ط _٥
١	٨	٦	٥	٢
٢	٢	٣	٦	٤
٣	٦	٤	١	٧
٤	١	٧	٤	١

جدول ربح :

ط		البدائل		
ط _١	ط _٢	ط _٣	ط _٤	ط _٥
٣	٠	٦	٤	٤
٨	٣	٢	١	١
١	٥	٢	١	١

المطلوب :

- ١- أوجد القرار المناسب لكل جدول في حالة التفاؤل ثم في حالة التشاؤم
- ٢- أوجد القرار المناسب بافتراض معامل التفاؤل ٠,٣
- ٣- أوجد القرار المناسب الذي يُؤخذ بمقياس الأسف
- ٤- أوجد القرار المناسب الذي يُؤخذ بمقياس تساوي الاحتمالات

(٦) أراد مدير الشركة المصرية تقدير كمية المشتريات من سلعة معينة بحيث يحقق له هذا الاختيار أقصى الأرباح ، فإذا كانت الإستراتيجيات المرغوب الاختيار من بينها هي شراء ٣٠ ، ٣٤ ، ٣٨ ، ٤٢ وحدة ، وكانت مستويات الطلب المتوقعة هي ٣٢ ، ٣٤ ، ٤٠ ، ٤٨ وحدة فإذا علمت أن سعر الوحدة

بحوث العمليات

(٤) نظرية اتخاذ القرارات

الواحدة من السلعة في السوق هي ٩ جنيهات وتكلفة شراؤها ٧ جنيهات والسلعة التي لا تباع تفقد قيمتها . والمطلوب :

معرفة أفضل الإستراتيجيات وفقاً لـ ٥ معايير الخمسة لنموذج عدم التأكد (مقابل التفاؤل ٠,٩) ؟

(٧) شركة ترغب في اختيار استراتيجية الشراء التي تحقق بها أقصى الأرباح فإذا كانت الإستراتيجيات المتاحة هي شراء ١٢ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٦ وحدة ، وكانت مستويات الطلب المتوقعة هي ١٥ ، ١٩ ، ٢٢ ، ٢٨ وحدة ، وكان سعر الوحدة الواحدة يساوي ٥ جنيهات وتكلفة شراؤها ٤ جنيهات والوحدات التي لا تباع تُقدر قيمة كل وحدة بجنيهين والمطلوب :

معرفة أفضل الإستراتيجيات وفقاً لـ ٥ معايير الخمسة لنموذج عدم التأكد (مقابل التفاؤل ٠,٧) ؟

الفصل الخامس

نظرية المباريات

The Games Theory

تتناقش هذه النظرية كيفية تحليل المواقف المتعارضة ، فكل منشأ تجاريه أهداف خاصة تسعى إلى تحقيقها ، وفي سبيل ذلك فإنها تضع الخطط والإستراتيجيات الخاصة التي تكفل لها تحقيق هذه الأهداف ، وفي الجانب الآخر نجد أن هناك منشأ أخرى منافسه لها ، ولها أهدافها ومصالحها التي قد تتعارض مع أهداف ومصالح المنشأ الأولى ، فعائد أي خطه لأي منشأ لا يعتمد على هذه الخطه فقط ، ولكنه يعتمد على تفاعل هذه الخطه مع تحركات وخطط المنشأ المنافسه ، وعلى ذلك فإنه يتعين على كل منشأ أن تختار الخطه المناسبه في ضوء التحركات غير المعطومه بدقه من جانب المنشأ المنافسه .

إن موقف المواجهه بين المتنافسين يمكن تصويره على النحو التالي :

بفرض أن الشركة (أ) لديها عدة استراتيجيات (بدائل) يترتب على كل استراتيجيه عائد ما ، وهذا العائد في الوقت نفسه يمثل خسائر سوف تحدث بالنسبة للشركة المنافسه الأخرى ، كذلك فإن الشركة المنافسه سوف تحاول تقليل الخسائر (تقليل العائد للشركة (أ)) وذلك باتباع استراتيجيات مضادة لإستراتيجيات الشركة (أ) ، وفي مثل هذه الحالة فإن القرار المناسب للشركة (أ) يعتمد على استراتيجيات الشركة المنافسه . ولذلك ، فإنه يمكن التعبير عن هذه النظرية على أنها مباراه بين طرفين ، مكسب أحدهما يكون خساره للطرف الآخر ، وهذا النوع من المباريات يُسمى مباراه بين شخصين والنتيجه (صفر) .

ويتفرع من هذا النوع من المباريات نوعان من الإختيار الإستراتيجي :

- (١) إستراتيجيه مطلقه (صافيه) ، وهي التي تتكون من تحرك واحد معين
- (٢) إستراتيجيه مختلطه : تتكون من عدد من التحركات تُستخدم بنسبه ثابتة

الاستراتيجية المطلقة :

وهي مباريات ثنائية يتعين على كل متنافس فيها اختيار استراتيجية واحدة فقط ، وهي الإستراتيجية التي يحدث عندها توازن بين العائد الذي يتحقق للاعب (أ) وبين الخسائر التي تتحقق للطرف الآخر ، فهي بالنسبة للاعب (أ) تحقق أقصى القيم الدنيا للعائدات المتوقعة ، وهي بالنسبة للطرف الآخر سوف تحقق أدنى القيم القصوى للخسائر المتوقعة .

وحيث أن المباراة نتیجتها صفر ، (أي أن المجموع الجبري للمكاسب والخسائر = صفر) ، فإنه يمكن التعبير عن المباراة بين اثنين من اللاعبين (وليكن اللاعب " أ " واللاعب " ب ") في مصفوفة تسمى مصفوفة المباراة ، حيث تمثل المصفوفة الإستراتيجيات (الخطط) المتاحة للاعب (أ) ، كما تمثل الأعمدة الإستراتيجيات (الخطط) المتاحة للاعب (ب) ، وتمثل مكونات المصفوفة عادة المدفوعات المقابلة لكل خطه من خطط (أ) مع الخطه المقابله من خطط (ب) .

ويمكن عرض مصفوفة اللعبة على الصورة التاليه : -

اللاعب (ب)					
ص	س	ص	س
أ _١ و	أ _{١١} ٢١			أ _{٢١} ٢١	س _١
أ _٢ و	أ _{١٢} ٢٢			أ _{٢٢} ٢٢	س _٢
أ _٣ و	أ _{١٣} ٢٣			أ _{٢٣} ٢٣	س _٣
					.
					.
					.
أ _ن و	أ _{١ن} ٢ن			أ _{٢ن} ٢ن	س _ن

اللاعب (أ)

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

حيث تمثل :

س١، س٢، سن الخطط المختلفة للاعب (أ)

ص١، ص٢، صن الخطط المختلفة للاعب (ب)

وعلى كل لاعب إختيار خطه واحده من بين الخطط والتحركات البديله المتاحة له ، فكل لاعب يحاول إختيار الخطه المناسبه له بحيطه وحذر فاللاعب (أ) يبحث في كل خطه متاحه له عن العائد الأقل ، وبعد ذلك يختار أكبر عائد من بين هذه الأقلويات ، أي أن اللاعب (أ) يحكمه أسلوب (أكبر الأقل)

بينما يحاول اللاعب (ب) تجنب أكبر خساره ممكنه له ، ولهذا يبحث عن أكثر خساره يمكن أن تحققها كل خطه من الخطط ، ويختار أقل قيمه من هذه الخساره ، أي أن اللاعب (ب) يحكمه أسلوب (أقل الأكبر)

مثال (١)

تتنافس شركة طارق الكبرى مع شركة خالد للتجاره على الحصول على عقد توريد إحدى الطلبيات لإحدى الجهات ، وتعتمد شركة طارق الكبرى في الحصول على هذا العقد إما على تقديم منتجات مجانيه أو تخفيض سعر منتجاتها ، بينما ترى شركة خالد للتجاره إتباع إحدى الخططتين التاليتين :

(١) تغليف منتجاتها تغليفاً فاخراً جداً .

(٢) تكثيف حملته إعلانيه مؤثره في التعاقد .

وكانت مصفوفة اللعبه من وجهة نظر شركة طارق الكبرى في

الصوره التاليه :

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

شركة خالد للتجارة		شركة طارق الكبرى	تقديم منتجات مجانيه (س١)
تغليف المنتجات	حملة إعلانية مكثفه		
تغليفأ فاخرأ	ص١	٥٠	٦٠
٦٠ -	٧٠	٦٠ -	٧٠
		تخفيض سعر منتجات (س٢)	

فما هي الخطه المناسبه لكل شركه ، وماهى قيمة اللعبه ؟.

الحل :

إذا اتبعت شركة طارق الكبرى الخطه س١ ، فإنها تحقق مكسب قدره ٥٠ جنيه ، وذلك إذا ما اتبعت شركة خالد الخطه ص١ ، فى حين أنه سوف تحقق مكسباً قدره ٦٠ جنيه وذلك إذا ما اتبعت شركة خالد الخطه ص٢ . أما إذا اتبعت شركة طارق الكبرى الخطه س٢ ، واتبعت شركة خالد الخطه ص١ ، فإن شركة طارق ستحقق خساره قدرها ٦٠ جنيه ، وتحصل شركة خالد على مكسب قدره ٦٠ جنيه ، وإذا ما اتبعت شركة طارق الخطه س٢ ، واتبعت شركة خالد الخطه ص٢ ، فإن شركة طارق ستحقق مكسب قدره ٧٠ جنيه .

ومن التفصيل السابق نستطيع أن نوضح أنه ليس بمقدور طرف واحد التحكم فى نتيجة اللعبه ، حيث أن عائد اللعبه يرجع إلى تفاعل الخطه التى يختارها كل طرف من الأطراف فى نفس الوقت .

وبتطبيق أسلوب أكبر الأمل للمكسب وأقل الأكبر للخساره ، أو أكبر الأمل للصوف وأقل الأكبر للأعمده :

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

فإنه بالنسبة للصفوف نجد أن :

$$\boxed{\times} \quad \text{أقل قيمة في الصف الأول} = ٥٠$$

$$\boxed{\times} \quad \text{أقل قيمة في الصف الثاني} = ٦٠ -$$

$$٥٠ = \text{أي أن : أكبر الأقل}$$

وبالنسبة للأعمدة ، نجد أن :

$$\boxed{\times} \quad \text{أكبر قيمة في العمود الأول} = ٥٠$$

$$\boxed{\times} \quad \text{أكبر قيمة في العمود الثاني} = ٧٠$$

$$٥٠ = \text{أي أن : أقل الأكبر}$$

وعلى ذلك ، فإن (٥٠) تمثل نقطة الحل المشترك للعبة ، حيث أن ٥٠ هي أقل قيمة في الصف الذي توجد به ، وفي نفس الوقت في العمود الأول . وعلى ذلك فإن (٥٠) تمثل قيمة اللعبة ، وهي تمثل المكسب الذي سوف تحصل عليه شركة طارق ، والخسارة التي سوف تتحملها شركة خالد . ويمكن الحل مباشرة ودون تفصيل على النحو التالي :

شركة خالد			
	ص ١	ص ١	
شركة طارق	٦٠	٥٠	(س ١)
	٧٠	٦٠ -	(س ٢)
	٧٠ (٥٠)		
= أقل الأكبر			

وعلى ذلك توجد نقطة للحل المشترك وهي (٥٠) وتمثل قيمة اللعبة ويجب على شركة طارق إختيار الخطه (س ١) لأنها تحقق أفضل مكسب في مواجهة الشركه المنافسه . كما يجب على شركة خالد إختيار الخطه (ص ١) ، حيث أنها تحقق أقل خساره في مواجهة الشركه المنافسه .

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

مثال (٢)

بفرض أن مصفوفة اللعبة بالنسبة إلى اللاعب (أ) كانت في الصورة

التاليه :

اللاعب (ب)					الخطه
٤	٣	٢	١		
٦,٥	١٠	٥	٩	١	اللاعب (أ)
٧,٥	٨	٦	٧	٢	
٨,٥	٧	٤,٥	٨	٣	

فما هي أفضل خطه لكل لاعب ، وما هي قيمة اللعبة ؟

الحل :-

اللاعب (ب)					الخطه
٤	٣	٢	١		
٦,٥	١٠	٥	٩	١	اللاعب (أ)
٧,٥	٨	٦	٧	٢	
٨,٥	٧	٤,٥	٨	٣	
٨,٥	١٠	(٦)	٩		
				أقل الأكبر	

وعلى ذلك :

توجد نقطه للحل المشترك وهي (٦) ، وتسمى نقطة التلاقي أو

نقطة التوازن ، وتمثل قيمة اللعبة وسوف يحصل عليها (أ) .

وبذلك نجد أنه :

○ يجب على (أ) إختيار الخطه الثانيه .

○ يجب على (ب) إختيار الخطه الثانيه .

الاستراتيجيات المختلطة :

فى حالة ما إذا كانت المباراة ليست لها نقطة توازن أو نقطة تلاقي (أي حل مشترك) ويظل أمام كل لاعب أكثر من خطة ليختار بينهم دون أن يستطيع الوصول إلى قرار نهائى باختيار خطه واحده بصفه نهائيه ، حيث لاتوجد خطه وحيدته مثلى تحقق له أفضل عائد ، ففي هذه الحالة يقوم كل لاعب بخلط خطه المختلفه بحيث يختار إحدى الخطوط ثم يغيرها باختيار آخر ثم يعود إلى اختيار خطه أخرى ، وهكذا .

وهنا يجب وضع مقاييس معينه ثابتة ، أو ما يطلق عليها احتمالات ثابتة لإختيار كل خطه من الخطوط بحيث يكون العائد المتوقع أو الخساره المتوقعه ثابتة بالنسبه لجميع الخطوط .

وقبل تطبيق الإستراتيجيات المختلطة يجب تطبيق قوانين أو قواعد السيطرة على أساس تخفيض عدد الأعمده وعدد الصفوف بحيث يكون هناك صفين فقط وعمودين فقط ، ويمكن تلخيص قوانين السيطرة كما يلي :

(١) إذا كانت جميع عناصر أحد الصفوف متساويه أو تزيد عن المفردات المناظره لها فى صف آخر ، فإنه يمكن إستبعاد الصف الآخر عن المصفوفه دون أن يؤثر ذلك على نتيجة المباراة ، ويسمى الصف الأول بالصف المسيطر والصف الآخر بالصف المستبعد ، وذلك لأنه من الطبيعى أن اللاعب (أ) يلعب بهدف الربح ، فإذا ما زادت فرص الربح فى جميع عناصر أحد الصفوف عن صف آخر ، فإن اللاعب (أ) من الطبيعى أنه سوف لايلعب إلا على الصف الذى يحقق ربحاً أكبر .

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

(٢) إذا كانت جميع عناصر أحد الأعمدة متساوية أو تقل عن المفردات المناظرة لها في عمود آخر ، فإنه يمكن إستبعاد العمود الآخر عن المصفوفة دون أن يؤثر ذلك على نتيجة المباراة ، ويسمى العمود الأول بالعمود المسيطر والعمود الآخر بالعمود المستبعد ، لأنه من الطبيعي أن اللاعب (ب) يلعب بهدف تخفيض الخسائر ، فإذا ما نقصت فرص الخسائر أو قيمتها في عمود عن عمود آخر ، فإن اللاعب (ب) سيركز في اللعب في حدود العمود ذات أقل خساره ويستبعد العمود الآخر ذو الخسائر الأكبر .

وخلاصة القول ، تُستبعد الصفوف الأقل من الصفوف الأخرى ، وتُستبعد الأعمدة الأكبر من الأعمدة الأخرى .

مثال (٣)

المطلوب تطبيق قوانين السيطرة على مصفوفة المباراة التالية :

اللاعب (ب)

ص	ص	ص	ص	ص	ص
١	٨	١	٣	٩	١
٧	٦	٤	٥	٦	٢
٨	٥	٣	٤	٢	٣
١	١,٥	١	٦	٥	٤

الحل :

في المصفوفة الكبيره السابقه نلاحظ أن العمود (ص٢) يحتوى على مفردات مساويه أو أقل من جميع المفردات المناظرة لها في العمود (ص١) (ص٣) ، وبذلك يمكن إستبعادهما من المصفوفه ، وتختصر المصفوفه على

النحو التالي :

ص	ص	ص	
٠	١	٩	١س
٧	٤	٦	٢س
٨	٣	٢	٣س
١	١	٥	٤س

وكذلك في المصفوفة الجديد نجد أن جميع مفردات الصف (٢س) تساوى أو تزيد عن جميع المفردات المناظرة لها في الصف (٣س) ، وعلى ذلك يمكن إستبعاد الصف (٣س) واختصار المصفوفة على النحو التالى :

ص	ص	ص	
٠	١	٩	١س
٧	٤	٦	٢س
٨	٣	٢	٣س

وبذلك يمكن حل المباراة بطريقه أسهل لأن الحل المشترك للإستراتيجيه المطلقه سيكون (٤) ، ولقد سبق القول أنه إذا كانت نتيجة المباراة ليس لها حل مشترك ، فبتنا نتبع الإستراتيجيات المختلطة بعد تطبيق قوانين السيطرة الكامله وجعل المصفوفه من الرتبه (٢ × ٢) .

والمثال التالى يوضح كيفية حل الإستراتيجيات المختلطة : -

$$(أ) \begin{bmatrix} ١٥ & ١٤ \\ ١٣ & ١٧ \end{bmatrix}$$

إن المباراة السابقه لا تتضمن حلاً مشتركاً ، ولذلك فإنه من الأفضل بالنسبه لكل منافس إستخدام إستراتيجيه مختلطة ، فالمتنافس أ يختار الصف الأول بعض الوقت ، ويختار الصف الثانى بعض الوقت ، وتكون المشكله توزيع وقت المتنافس أ بين الصفوف وتوزيع وقت المتنافس ب بين الأعمده المختلفه .

استخدام الطريقة الحسابية في تصميم أفضل الاستراتيجيات : -
يمكن استخدام الطريقة الحسابية في تحديد أفضل الاستراتيجيات
بالنسبة للمباريات التي تتكون من 2×2 ، وهي المباريات التي يكون لكل
من المتنافسين إختيارين اثنين .
وسوف نشرح الطريقة احسابيه على المثال السابق الذي سبق لنا
ذكره والذي يتخذ الشكل التالي :

(ب)

$$\begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 13 & 17 \end{bmatrix} \quad (1)$$

وتتضمن الطريقة الحسابية الخطوات التاليه :
(١) يتم طرح أصغر قيمه في كل صف من القيمه الأكبر ، كما يتم طرح
أصغر قيمه في كل عمود من القيمه الأكبر ، وبذلك تكون المصفوفه في الشكل
التالي :

(ب)

$$\begin{matrix} & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 13 & 17 \end{bmatrix} & 1 & 4 \end{matrix} \quad (1)$$

(٢) يتم تبادل الأرقام التي نتجت من عملية الطرح :

(ب)

$$\begin{matrix} & 3 & 2 \\ \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 13 & 17 \end{bmatrix} & 4 & 1 \end{matrix} \quad (1)$$

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

(٣) لإيجاد استراتيجيات المتنافس (أ) يتم جمع (١ ، ٤) على أن يتم
قسمة كل رقم منهما على المجموع ، وبنفس الطريقة يتم إيجاد إستراتيجيات
المتنافس (ب) عن طريق جمع (٣ ، ٢) على أن يتم قسمة كل رقم منهما
على المجموع . وبذلك تكون المصفوفة بعد تنفيذ ما تقدم كما يلي :

(ب)

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 15 & 14 \\ 13 & 17 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{matrix} \quad (أ)$$

وبذلك تكون إستراتيجيات "أ" $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{5}$ وتكون إستراتيجيات "ب" $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{5}$

، وهذه النتائج تطابق ما سبق أن توصلنا إليه ، ونعيب على الطريقة

الحسابية أنها صالحة فقط للمباريات التي تتكون من (٢ × ٢) ، ولا يمكن

تطبيقها على المباريات إذا زاد عدد إختيارات كل من اللاعبين عن إختيارين .

أما قيمة المباراة فستكون كالآتي :

$$\frac{112}{25} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times 14$$

$$\frac{180}{25} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times 15$$

$$\frac{34}{25} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times 17$$

$$\frac{39}{25} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times 13$$

$$14,6 = \frac{365}{25} =$$

إستخدام طريقة المباريات الفرعية في حالة مصفوفة التي ترتيبها 2×2

استخدمنا قوانين السيطر لتخفيض مصفوفة نتائج المباراة إلى 2×2 ولكن في بعض الأحيان نجد أنه لا يمكننا تخفيض مصفوفة نتائج المباراة إلى 2×2 باستخدام قوانين السيطر ، ولهذا نلجأ إلى طريقة المباريات الفرعية والمثال التالي يوضح هذه الطريقة .

مثال (٤)

حدد أفضل الإستراتيجيات وقيمة المباراة التالية :

$$(ب) \quad (أ) \quad \begin{pmatrix} ٢- & ٢ & ١٠- \\ ٤ & صفر & ٨ \\ صفر & ٤ & ١٠- \end{pmatrix}$$

الحل :

يُستبعد الصف الأول نظراً لسيطرة الصف الثالث عليه ، وبذلك تصبح المصفوفة :

$$(ب) \quad (أ) \quad \begin{pmatrix} ٤ & صفر & ٨ \\ صفر & ٤ & ١٠- \end{pmatrix}$$

ونلاحظ هنا أنه لا يمكن إختصار حجم المصفوفة لأكثر من ذلك نتيجة عدم انطباق قوانين السيطر بعد ذلك ، ومن هنا يتم الحل بتجزئة المصفوفة المذكورة إلى عدد من المباريات الفرعية بحيث تصبح كل مباراة فرعية 2×2 وعلى ذلك فإن المباريات الفرعية تكون على النحو التالي :

(٥) نظرية المباريات

بحوث العمليات

المصفوفة الفرعية الأولى :

(ب)

$$(أ) \begin{bmatrix} ٨ & \text{صفر} \\ ١٠- & ٤ \end{bmatrix}$$

المصفوفة الفرعية الثانية :

(ب)

$$(أ) \begin{bmatrix} ٤ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ٤ \end{bmatrix}$$

المصفوفة الفرعية الثالثة :

(ب)

$$(أ) \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ \text{صفر} & ١٠- \end{bmatrix}$$

ويتم حل كل مصفوفة فرعية باستخدام الطرق السابق شرحها للمباراد

التي تتكون من (٢ × ٢) ، سواء الطريقة التحليلية أو الحسابية .

فإذا استخدمنا الطريقة الحسابية ، نجد أن الإستراتيجيات المثلى وقيمة المباراد

الفرعية تكون على النحو التالي :

المباراة الفرعية الأولى :

$$\begin{array}{cc} \frac{١٨}{٢٢} & \frac{٤}{٢٢} \\ \frac{١٤}{٢٢} & \frac{٨}{٢٢} \end{array} \begin{bmatrix} ٨ & \text{صفر} \\ ١٠- & ٤ \end{bmatrix} \quad \begin{array}{cc} ١٨ & ٤ \\ ١٤ & ٨ \end{array} \begin{bmatrix} ٨ & \text{صفر} \\ ١٠- & ٤ \end{bmatrix} \quad \begin{array}{cc} ٤ & ١٨ \\ ٨ & ١٤ \end{array} \begin{bmatrix} ٨ & \text{صفر} \\ ١٠- & ٤ \end{bmatrix}$$

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

$$\begin{aligned} \text{قيمة المباراة} &= \left(\frac{4}{22} \times \frac{8}{22} \times 10 \right) - \left(\frac{4}{22} \times \frac{14}{22} \times 8 \right) \\ &+ \left(\frac{18}{22} \times \frac{8}{22} \times 4 \right) - \left(\frac{18}{22} \times \frac{8}{22} \times \text{صفر} \right) \\ &= \frac{576}{484} + \text{صفر} + \frac{320}{484} - \frac{448}{484} \end{aligned}$$

$$\text{قيمة المباراة} = 0.93 - 0.66 + \text{صفر} - 1.19 = 1.46$$

المباراة الفرعية الثانية :

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{cc} \text{صفر} & 4 \\ \text{صفر} & 4 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\text{قيمة المباراة} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 \right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \text{صفر} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \text{صفر} \right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 \right)$$

$$= \text{صفر} + 1 + 1 + \text{صفر} = 2$$

المباراة الفرعية الثالثة :

(ب)

$$\left[\begin{array}{cc} 4 & 8 \\ \text{صفر} & 10 \end{array} \right] \quad (أ)$$

توجد نقطة تلاقي ممثله في الرقعة (٤) ، حيث أنه أصغر قيمة في

الصف الأول وأكبر قيمه في العمود الثاني ، وبذلك يكون حل المباراة الفرعية

الثالثة ممثلاً في الصف الأول والعمود الثاني ، وقيمة المباراة = ٤

(٥) نظرية المباريات

بحوث العمليات

وباستعراض نتائج المباريات الفرعية الثلاث نجد أن المباراة الفرعية الأولى صاحبة أصغر قيمة ، ولذلك فإنها تمثل الحل الأمثل للمباراة كلها والذي يتخذ الشكل التالي :

المتنافس (أ) : صفر ، $\frac{7}{11}$ ، $\frac{4}{11}$ ، وذلك بالنسبة لنصفوف الثلاثة

على الترتيب

المتنافس (ب) : $\frac{2}{11}$ ، $\frac{9}{11}$ ، صفر ، وذلك بالنسبة للأعمدة الثلاثة

على الترتيب

وقيمة المباراة = ١,٤٦

مثال (٥)

إذا كانت مصفوفة نتائج المباراة الصفرية بين س ، ص كما يلي :

(ص)

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 10 & \text{صفر} & 4 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{س})$$

والمطلوب إيجاد الاستراتيجية المثلى وقيمة المباراة؟

الحل :

بفحص المصفوفة السابقة يتضح أنه لا توجد نقطة تلاقي ، وحيث أن أصغر أكبر قيمة في الأعمدة هي ٦ ، في حين أن أكبر أصغر قيمة في الصفوف هي ٤ ، هذا ويمكن استخدام قوانين السيطرة لتصغير المصفوفة السابقة لتصبح

(٢×٢) أي صفين وعمودين على النحو التالي :

✕ بحذف العمود الثالث لسيطرة العمود الثاني عليه ، ثم بحذف الصف

الثاني نظراً لسيطرة الصف الثالث عليه ، وبذلك تصبح المصفوفة :

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

(ص)

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} \quad (س)$$

ⓧ وحيث لا توجد نقطة تلاقي . إذ أن لا توجد استراتيجية مطلقة بل استراتيجية مختلطة ، ويمكن إيجاد نسب أو احتمال نتائج كل استراتيجية بالنسبة لكل متنافس وحساب قيمة المباراة على النحو التالي :

١- حساب الفروق بين مفردات كل صف وكل عمود :

(ص)

فروق الصفوف

$$\begin{array}{c|cc} ٤ & ٢ & ٦ \\ ٣ & ٧ & ٤ \\ \hline ٥ & ٢ & \end{array} \quad (س)$$

فروق الأعمدة

٢- تبادل مواقع الفروق السابق حسابها :

(ص)

فروق الصفوف

$$\begin{array}{c|cc} ٣ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ٧ & ٤ \\ \hline ٢ & ٥ & \end{array} \quad (س)$$

فروق الأعمدة

٣- إيجاد نسب استخدام كل استراتيجية :

(ص)

$$\begin{array}{c|cc} \frac{٣}{٧} & ٢ & ٦ \\ \hline \frac{٤}{٧} & ٧ & ٤ \\ \hline \frac{٢}{٧} & ٥ & \end{array} \quad (س)$$

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

ويمكن إيجاد قيمة المباراة كالآتي :

$$\frac{9}{49} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{7} \times 6 = \text{قيمة المباراة}$$

$$\frac{12}{49} = \frac{2}{7} \times \frac{3}{7} \times 2$$

$$\frac{80}{49} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times 4$$

$$\frac{56}{49} = \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} \times 7$$

$$4,857 = \frac{238}{49} =$$

ويلاحظ أن :

⊗ الأرباح المتوقعة للمتنافس (س) تعادل الخسائر المتوقعة للمتنافس (ص)

⊗ المنافس (س) يستخدم الاستراتيجية الأولى $\frac{3}{7}$ من الوقت والاستراتيجية

الثالثة $\frac{4}{7}$ من الوقت

⊗ أما المنافس (ص) يستخدم الاستراتيجية الأولى $\frac{5}{7}$ من الوقت

والاستراتيجية الثانية $\frac{2}{7}$ من الوقت

مثال (٦)

إذا كانت مصفوفة نتائج المباراة بين س ، ص كما يلي :

(ص)

$$\left(\begin{array}{ccccc} 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 12 & 9 & \text{صفر} \\ 2 & 8 & 6 & 5 & 4 \end{array} \right) \quad (\text{س})$$

والمطلوب إيجاد الاستراتيجية المثلى وقيمة المباراة ؟.

الحل :

باستخدام قوائم السيطرة نجد أن الصف الثالث مسيطر على الصف الأول
فسيتم استبعاده ، وأن العمود الثاني مسيطر على العمود الثالث والعمود الرابع
وعلى ذلك :

$$\begin{pmatrix} ١٠ & ٩ & \text{صفر} \\ ٢ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد أن المصفوفة الناتجة بعد تطبيق قواعد السيطرة ستكون (٣×٢)
ولحل المصفوفة السابقة يتم تقسيمها إلى عدد معين من المباريات الفرعية ،
كل منها تكون (٢×٢) على النحو التالي :

$$\begin{pmatrix} ٩ & \text{صفر} \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} \quad \text{المباراة الفرعية الأولى :}$$

$$\begin{pmatrix} ١٠ & \text{صفر} \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} \quad \text{المباراة الفرعية الثانية :}$$

$$\begin{pmatrix} ١٠ & ٩ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} \quad \text{المباراة الفرعية الثالثة :}$$

وبحل المباراة الفرعية الأولى :

$$\begin{array}{c|c|c} \text{الأقل} & (ص) & \\ \hline \text{صفر} & ٩ & \text{صفر} \\ \hline ٤ & ٥ & ٤ \\ \hline & ٩ & ٤ \end{array} \quad (س)$$

الأكبر

أكبر الأقل (٤) وأقل الأكبر (٤) ، وعلى ذلك توجد نقطة تلاقي

∴ قيمة المباراة = ٤

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

وبحل المباراة الفرعية الثانية :

نجد أنه لا توجد نقطة تلاقى وسنقوم بحلها بالطريقة الحسابية :

$$\begin{array}{c|cc} (ص) & ١٠ & ١٠ \text{ صفر} \\ ١٠ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٨ & ٤ \end{array} \quad (س)$$

$$\begin{array}{c|cc} (ص) & ٢ & ١٠ \text{ صفر} \\ ١٠ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ & ٨ \end{array} \quad (س)$$

$$\begin{array}{c|cc} (ص) & \frac{٢}{١٢} & ١٠ \text{ صفر} \\ \frac{١٠}{١٢} & ٢ & ٤ \\ \frac{٤}{١٢} & \frac{٨}{١٢} & \frac{٤}{١٢} \end{array} \quad (س)$$

$$\text{قيمة المباراة} = \text{صفر} \times \frac{٢}{١٢} \times \frac{٨}{١٢} = \text{صفر}$$

$$\frac{٨٠}{١٤٤} = \frac{٤}{١٢} \times \frac{٢}{١٢} \times ١٠$$

$$\frac{٣٢٠}{١٤٤} = \frac{٨}{١٢} \times \frac{١٠}{١٢} \times ٤$$

$$\frac{٨٠}{١٤٤} = \frac{٤}{١٢} \times \frac{١٠}{١٢} \times ٢$$

$$٣,٣٣ = \frac{٤٨٠}{١٤٤} =$$

(٥) نظرية المباريات

حوث العنبيات

وبحل المباراة الفرعية الثالثة :

(ص)			الأقل
٩	١٠	٩	
٢	٢	٥	(س)
١٠	٩		

الأكبر

أكبر الأقل (٩) وأقل الأكبر (٩) ، وعلى ذلك توجد نقطة تلاقي

∴ قيمة المباراة = ٩

وبتلخيص ما سبق نجد الآتي :

قيمة المباراة الفرعية الأولى = ٤

قيمة المباراة الفرعية الثانية = ٣,٣٣

قيمة المباراة الفرعية الثالثة = ٩

أقل قيمة من القيم الثلاثة = ٣,٣٣ ، أي تمثل قيمة المباراة الأصلية .

ومعنى ذلك أن :

⊗ المتنافس (س) يستخدم الاستراتيجية الثانية $\frac{٢}{١٢}$ من الوقت والاستراتيجية

الثالثة $\frac{١٠}{١٢}$ الوقت

⊗ أما المتنافس (ص) يستخدم الاستراتيجية الأولى $\frac{٨}{١٢}$ من الوقت

والاستراتيجية الخامسة $\frac{٤}{١٢}$ من الوقت

تعاريف على نظرية المباريات

(١) حدد الإستراتيجيات المثلى وكذلك قيمة المباراة لمصفوفة المباراة التالية :

اللاعب (ب)

٦ - ٣ - ١ - صفر - ٢ -

اللاعب (أ) ٣ - ٢ : ٢ - ١

(٢) حدد الإستراتيجيات المثلى لكل من أ ، ب وكذلك قيمة المباراة لمصفوفة

المباراة التالية :

(ۛ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1- & 2 \\ \text{صفر} & 5- & 3 \\ 1 & 3- & 2- \\ 2- & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (i)$$

(3) حدد الإستراتيجيات المثلى وكذلك قيمة المباراة لمصفوفة المباراة التالية :

(پ)

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 3 \\ 9 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (i)$$

(٤) حل المباراة الثانية :

(ب)

(२ २ १ - १ २ - ३)
(२ - ३ ३ - २ २ ३) (i)

(٥) حل المباراة الثانية :

(پ)

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \quad (i)$$

بحوث العمليات

(٥) نظرية المباريات

(٦) حدد الإستراتيجيات المثلى لكل من أ ، ب وكذلك قيمة المباراة لمصفوفات

المباريات التالية :

أولاً :

$$(ب) \begin{pmatrix} ١٥ & ٤ & ٣ & ٢ \\ ١٤ & ٨ & ١١ & ٩ \\ ٤ & ٦ & ١٣ & ٥ \end{pmatrix}$$

ثانياً :

$$(ب) \begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ٨ & ٦ & \text{صفر} \\ ٣ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$$

(٧) حدد الإستراتيجيات المثلى وكذلك قيمة المباراة لمصفوفات المباريات

التالية :

أولاً :

$$(ب) \begin{pmatrix} ٣ & ٥ & ٢- \\ ٢ & ١ & ٣- \\ ١ & \text{صفر} & ٤ \end{pmatrix} (أ)$$

ثانياً :

$$(ب) \begin{pmatrix} ٣ & ٨ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٦ \\ ٢ & ١ & \text{صفر} \end{pmatrix} (أ)$$

الفصل السادس

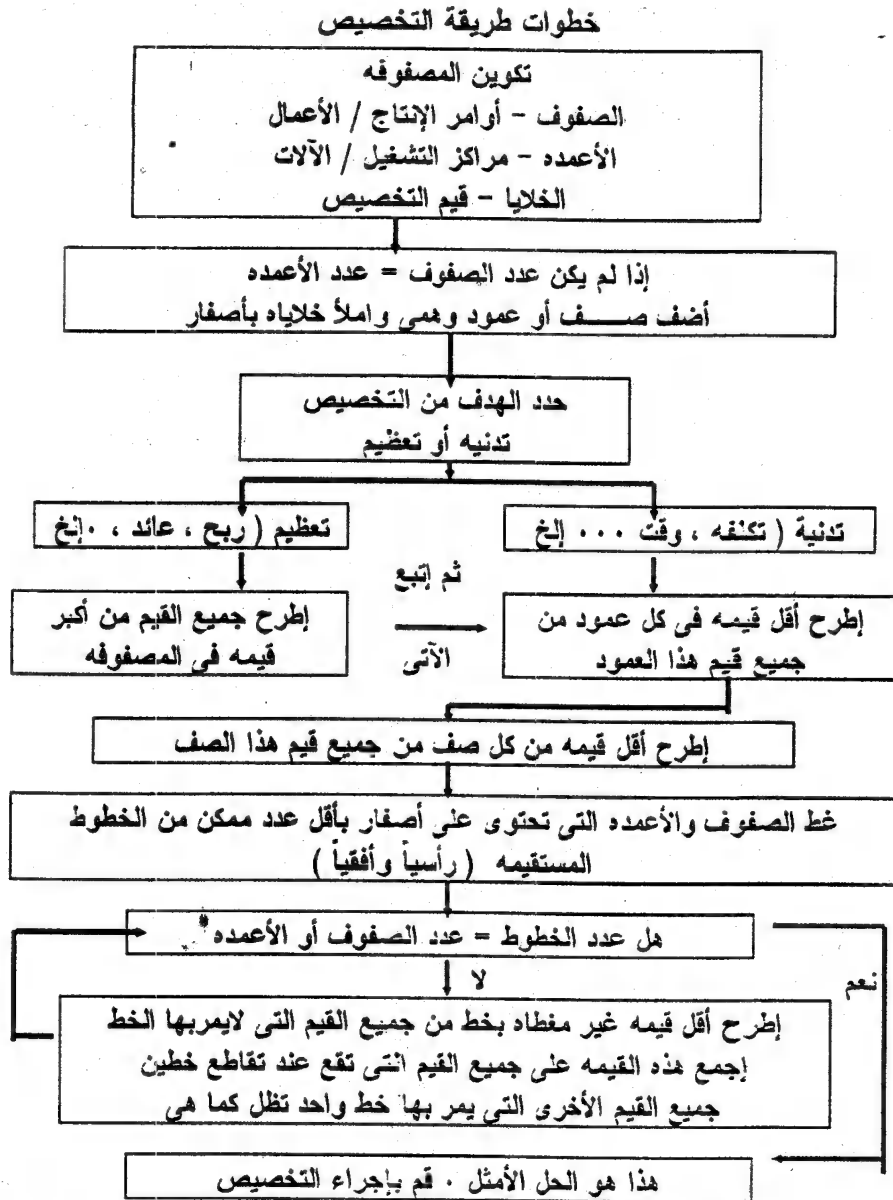
نماذج التخصيص

The Assignment Models

مقدمة

تمثل ظاهرة التخصيص أسلوب خاص من أساليب البرمجة الخطية ،
تستخدم في توزيع عدة أعمال أو مهام على عدد من المراكز الإنتاجية البدئية ،
وذلك بهدف تحقيق أفضل من الأعمال ومراكز الإنتاج .
ويمكن تلخيص خطوات طريقة التخصيص في الشكل الآتي * :-

* هذه الخطوات من تصميم الأستاذ الدكتور عبد العزيز جميل مخيمر ، أستاذ إدارة الأعمال بكلية التجارة - جامعة المنصورة .



وفيما يلي توضيح كيفية تطبيق الخطوات الواردة بالشكل رقم (١) من خلال بعض الأمثلة :

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

مثال (١)

شركة مقاولات تعمل في ثلاثة مشاريع لبناء مدارس في كل من القرى [١] ، [٢] ، [٣] ، وفي كل موقع تحتاج الشركة إلى مهندس تنفيذ مقيم .
 ** أعلنت الشركة عن رغبتها في تعيين مهندسين بمواصفات معينة ، فتقدم لها ثلاثة ممن تتوافر فيهم الشروط وهم [أ] ، [ب] ، [جـ] ، وكانت الأجور التي طلبوها لقبول العمل مبيّنة بالجدول التالي بالجنيه لكل يوم عمل :

المهندس \ القرية	(١)	(٢)	(٣)
(أ)	٤٠	٥٤	٦٠
(ب)	٢٠	٣٦	٣٢
(جـ)	٢٨	٣٢	٢٤

فما هو أفضل تخصيص ممكن تقوم به الشركة بين المهندسين والمواقع لتحقيق إجمالي أجور أقل ما يمكن ؟ .

الحل :

لأن الهدف هو تخفيض التكلفة إلى أقل حد ممكن ، فإن الخطوة الأولى تتمثل في طرح أقل قيمة في كل عمود من قيم هذا العمود ، وعلى ذلك :

المهندس \ القرية	(١)	(٢)	(٣)
(أ)	٢٠	٢٢	٣٦
(ب)	صفر	٤	٨
(جـ)	٨	صفر	صفر

** وتتمثل الخطوة الثانية في طرح أقل قيمة من كل صف من جميع قيم هذا الصف ، ويلاحظ أن الصفوف التي توجد بها أصفار تظل كما هي ، ويكون :

المهندس \ القرية	(١)	(٢)	(٣)
(أ)	صفر	٢	١٦
(ب)	صفر	٤	٨
(ج)	٨	صفر	صفر

فى الخطوط التالية نقوم بتغطية الصفوف والأعمدة التى تحتوى على أصفار بأقل عدد ممكن من الخطوط ، ويمكن رسم هذه الخطوط بأى طريقه بالشروط التالية :

- ١- أن يكون عدد الخطوط أقل ما يمكن .
 - ٢- أن يتم رسم هذه الخطوط أفقياً أو رأسياً ، ولايسمح برسم أى خطوط تمر بقطر المصفوفة .
- ويرسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية الأعمدة والصفوف التى تحوى أصفار ، ونختبر ما إذا كان عدد الخطوط يساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمدة ، فإذا كان يساويها فإنه يمكن الوصول إلى الحل الأمثل . أما إذا كان لا يساويها يلزم الأمر تنفيذ الخطوات الموضحة فى الشكل رقم (١)
- ومن مقارنة عدد الخطوط فى المصفوفة السابقة بعدد أعمدها أو صفوفها نجد أن عدد الخطوط لايساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمدة وفى هذه الحالة تتم تنفيذ خطوه إضافيه تتمثل فى تحديد أقل قيمه غير مغطاه بخط وطرح هذه القيمه من جميع القيم غير المغطاه بخط ، ثم إضافتها إلى جميع القيم التى تقع عند تقاطع خطين ، وتظل جميع القيم الأخرى كما هى .

ففى المصفوفة السابقة نجد أن أقل قيمه غير مغطاه بخط = ٢ [فى الصف (أ) عمود ٢] ، وبتطبيق هذه الخطوه نحصل على المصفوفه :

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

المهندس \ القرية	(١)	(٢)	(٣)
(أ)	صفر	صفر	١٤
(ب)	صفر	٢	٦
(جـ)	١٠	صفر	صفر

وفي المصفوفة الأخيرة ، حيث أن عدد الصفوف أو عدد الأعمدة = عدد الخطوط ، فإنه يمكن تحديد الحل الأمثل ، وذلك بتخصيص الصفوف والأعمدة التي تحتوى على أصفار فرديه . فالصف (ب) يحتوى على صفر واحد في العمود (١) ، نشطب الصف (ب) والعمود (١) :

(٢)	(٣)
صفر	١٤
(جـ) صفر	صفر

الصف (أ) يحتوى على صفر واحد في العمود (٢) ، ولذلك نشطب الصف (أ) والعمود (٢)

(٣)

(جـ) صفر

أى الصف (جـ) يحتوى على صفر واحد في العمود (٣) .
ويكون التوزيع النهائى على النحو التالى :

المهندسين	القرية	التكلفة
(أ)	٢	٥٤
(ب)	١	٢٠
(جـ)	٣	٢٤
التكلفة الكلية		٩٨ جنيه يومياً

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

مثال (٢)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج أربعة منتجات ويمكن تصنيع هذه المنتجات على أي آلة من الآلات الأربع المتوفرة لدى الشركة ، وفيما يلي تكلفة إنتاج الوحدة من كل منتج على كل آلة :

الآلات المنتجات	(١)	(٢)	(٣)	(٤)
(أ)	٤	٦	٣	٩
(ب)	٦	٣	٦	٤
(ج)	٨	٦	٤	٦
(د)	٧	٥	٦	٨

والمطلوب تخصيص المنتجات الأربعة للآلات المتاحة بحيث تصل تكلفة الإنتاج إلى أقل حد ممكن ؟ .

الحل :

حيث أن الهدف المطلوب تحقيقه هو تخفيض التكلفة إلى أقل حد ممكن ، فإن الخطوة الأولى تتمثل في طرح أقل قيمة في كل عمود من قيم هذا العمود ، فنحصل على :

الآلات المنتجات	(١)	(٢)	(٣)	(٤)
(أ)	صفر	٣	صفر	٥
(ب)	٢	صفر	٣	صفر
(ج)	٤	٣	١	٢
(د)	٣	٢	٣	٤

وتتمثل الخطوة التالية في طرح أقل قيمة في كل صف من جميع قيم

هذا الصف ، مع ملاحظة أن الصفوف التي بها أصفار تظل كما هي ، فيكون :

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

المنتجات \ الآلات	(١)	(٢)	(٣)	(٤)
(أ)	صفر	٣	صفر	٥
(ب)	٢	صفر	٣	صفر
(ج)	٣	٢	صفر	١
(د)	١	صفر	١	٢

وفي الخطوات التالية نقوم بتغطية الصفوف والأعمدة التي تحتوي على

أصفار بأقل عدد ممكن من الخطوط .

وبرسم الخطوط نجد أن عدد الخطوط المستقيمة = عدد الصفوف أو الأعمدة ،

فنكون وصلنا إلى الحل الأمثل .

والخطوة التالية هي لتحديد التخصيص الأمثل ، ونبدأ بتخصيص الصفوف التي

تحتوي على صفر واحد ، أي :

جـ / ٣ و د / ٢ و أ / ١ و ب / ٤

وعلى ذلك يمكننا تحديد الحل الأمثل لهذه المشكلة وتكلفة الحل كالآتي :

المنتج	الآلة	التكلفة
(أ)	١	٤
(ب)	٤	٤
(ج)	٣	٤
(د)	٢	٥
التكلفة الكلية		١٧

مثال (٣)

يوضح الجدول التالي وقت تشغيل كل أمر من أوامر الإنتاج على الآلات الأربعة

المتاحه ، والمطلوب توزيع تلك الأوامر على الآلات بحيث يكون الوقت الكلى

للتشغيل أقل ما يمكن :

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

الآلات الأوامر	(أ)	(ب)	(جـ)	(د)
١	١٢	١٦	١٤	١٠
٢	٩	٨	١٣	٧
٣	١٥	١٢	٩	١١

الحل :

حيث أن عدد الصفوف في الجدول المعطى لا يساوى عدد الأعمدة فيلزم إضافة صف وهمى ليصبح عدد الصفوف = عدد الأعمدة .

الأوامر	الآلات	(أ)	(ب)	(جـ)	(د)
١	١٢	١٦	١٤	١٠	
٢	٩	٨	١٣	٧	
٣	١٥	١٢	٩	١١	
٤	صفر	صفر	صفر	صفر	

وبطرح أقل قيمه في كل صف من جميع قيم ذلك الصف ، يكون :

الأوامر	الآلات	(أ)	(ب)	(جـ)	(د)
١	٢	٦	٤	صفر	صفر
٢	٢	١	٦	صفر	صفر
٣	٦	٣	صفر	٢	٢
٤	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر

* بطرح أقل قيمه في كل عمود من جميع قيم ذلك العمود ، نجد أن المصفوفه

السابقه تظل كما هي ، لأن جميع أعمدها تحتوى على صفر أو أكثر .

* برسم أقل عدد من الخطوط لتغطية الأعمده والصفوف التى تحتوى على

أصفار ، وحيث أن عدد الخطوط (٣) وهو لا يساوى عدد الصفوف أو الأعمده

(٤) ، يتطلب الأمر تنفيذ خطوه إضافيه كما سبق ، وبتنفيذ هذه الخطوه

نحصل على المصفوفه التاليه :

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

الأوامر \ الآلات	(أ)	(ب)	(ج)	(د)
١	١	٥	٣	صفر
٢	١	صفر	٥	صفر
٣	٦	٣	صفر	٣
٤	صفر	صفر	صفر	١

وحيث أن عدد الخطوط = عدد الصفوف فإنه يمكن تحديد الحل الأمثل

وذلك بالتخصيص التالي :

الأوامر	الآلات	وقت التشغيل
١	د	١٠
٢	ب	٨
٣	جـ	٩
٤	أ	--
الوقت الإجمالي		٢٧

ومن هذا الجدول الأخير لا يوجد وقت تشغيل أمام الآلة (أ) ، وهذا يعنى أن

الآلة أ لن تستخدم فى تشغيل أى من الأوامر الثلاث .

مثال (٤)

شكّلت لجنة من المسؤولين بإدارة الأفراد بإحدى الشركات للاختيار من بين المتقدمين لشغل الوظائف الخالية بالشركة والتي يبلغ عددها أربعة وظائف ، وقد بلغ عدد المتقدمين لشغل هذه الوظائف خمسة أفراد ، وفيما يلى الدرجات التى حصل عليها كل متقدم بالنسبة لكل وظيفة ، وتعكس هذه الدرجات مقدرة طالب الوظيفة على أداء واجباتها .

والمطلوب :

إختيار أفضل المتقدمين وتوزيعهم على الوظائف المختلفة ؟

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

الوظائف الأشخاص	١	٢	٣	٤
أ	٦	٩	٥	٧
ب	٥	١	٧	٥
ج	٢	٦	٩	٩
د	٢	٩	٧	٣
هـ	٤	٥	٦	٦

الحل :

يلاحظ من الجدول السابق عدم تساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة فيلزم إضافة عمود وهمى لجميع عناصره أصفارا ليصبح عدد الصفوف = عدد الأعمدة = ٥ ، ومن ثم يصبح الجدول كما يلى :

الوظائف الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	٦	٩	٥	٧	صفر
ب	٥	١	٧	٥	صفر
ج	٢	٦	٩	٩	صفر
د	٢	٩	٧	٣	صفر
هـ	٤	٥	٦	٦	صفر

يلاحظ فى إعداد المصفوفة السابقة أننا أضفنا وظيفة وهمية رقم (٥) ، وذلك لمساواة عدد الأعمدة مع عدد الصفوف ليسهل حل المشكله ، ومن الطبيعى أن الشخص الذى سيخصص لهذه الوظيفة لن يُعين بالشركه .
وبتكوين المصفوفة السابقة نأتى إلى تحديد الهدف المراد تحقيقه من التخصيص . ومن الواضح أن الهدف فى هذه الحالة يتمثل فى تحقيق أقصى كفاءة ممكنه فى أداء هذه الوظائف .
وبالتالى فإن الخطوة الأولى فى حل هذه المشكله تتمثل فى طرح جميع قيم المصفوفه من أكبر قيمه بها ، وحيث أن أكبر قيمه بالمصفوفه = ٩ ، فإن المصفوفه الجديده تظهر كالاتى :

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

الوظائف الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	٣	صفر	٤	٢	٩
ب	٤	٨	٢	٤	٩
ج	٧	٣	صفر	صفر	٩
د	٧	صفر	٢	٦	٩
هـ	٥	٤	٣	٣	٩

وفى الخطوه التاليه نقوم بطرح أقل قيمه فى كل عمود من جميع قيم ذلك العمود فنحصل على المصفوفه التاليه :

الوظائف الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	صفر	صفر	٤	٢	صفر
ب	١	٨	٢	٤	صفر
ج	٤	٣	صفر	صفر	صفر
د	٤	صفر	٢	٦	صفر
هـ	٢	٤	٣	٣	صفر

وتتمثل الخطوه التاليه فى طرح أقل قيمه فى كل صف من جميع قيم هذا الصف ، ومن الجدير بالذكر أن جميع صفوف المصفوفه السابقه تحتوى على صفر واحد أو أكثر ، ومعنى هذا أن قيم تلك المصفوفه ستبقى كما هي دون تغيير نتيجة تنفيذ هذه الخطوه . ومن ثم نقوم برسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية الأعمده والصفوف التى تحتوى على أصفار (ثلاث خطوط أفقيه تغطى الصفوف أ ، ج ، د ، وخط رأسى واحد يغطى العمود رقم (٥) ونظراً لأن عدد الخطوط = ٤ ، وهو لايساوى عدد الصفوف (٥) . فإن الأمر يتطلب تنفيذ خطوه إضافيه تتمثل فى تحديد أقل قيمه غير مغطاه بخط ، وطرح هذه القيمه من جميع القيم الغير مغطاه بخط ، ثم إضافتها إلى جميع القيم التى تقع عند تقاطع خطين وتظل جميع القيم الأخرى كما هي . وفى المصفوفه السابقه نجد أن أقل قيمه غير مغطاه بخط = ١ (فى الصف ب عمود ١) ، وبتنفيذ هذه الخطوه نحصل على المصفوفه التاليه :

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

الوظائف الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	صفر	صفر	٤	٢	١
ب	صفر	٧	١	٣	صفر
ج	٤	٢	صفر	صفر	١
د	٤	صفر	٢	٦	١
هـ	١	٣	٢	٢	صفر

ويرسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية الأعمدة والصفوف التي تحتوى على أصفار ، نجد أن عدد هذه الخطوط مازال = ٤ ، وهو أقل من عدد الصفوف ، وبالتالي يتطلب الأمر تكرار الخطوة السابقة ، وذلك بطرح أقل قيمه غير مغطاه بخط وإضافتها إلى جميع القيم التي تقع عند تقاطع خطين وتظل جميع التقييم الأخرى كما هي .

وفى المصفوفه السابقه نجد أن أقل قيمه غير مغطاه بخط = ١ (فى النصف ب عمود ٣) ، وبتنفيذ هذه الخطوة نحصل على المصفوفه التاليه :

الوظائف الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	صفر	صفر	٣	١	١
ب	صفر	٧	صفر	٢	صفر
ج	٥	٤	صفر	صفر	٢
د	٤	صفر	١	٥	١
هـ	١	٣	١	١	صفر

وحيث أن عدد الخطوط = عدد الصفوف ، فإنه يمكن تحديد الحل الأمثل ، وذلك بتخصيص الفوف والإعمده التي تحتوى على أصفار فرديه ، فالنصف (د) يحتوى على صفر واحد فى العمود (٢) ، والنصف (هـ) يحتوى على صفر واحد فى العمود (٥) ، والعمود (٤) يحتوى على صفر واحد فى النصف (جـ) ، ويتبقى بعد ذلك تخصيص وظيفة كل من (أ ، ب)

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

وبمقارنة الأرقام الموضحة بهذه الخلايا ، نجد أن الوظيفة رقم (١) تفضل بالنسبة للشخص (أ) ، بينما يُفضل تخصيص الشخص (ب) للوظيفة رقم (٣) ويكون التوزيع النهائي للأشخاص على الوظائف على النحو التالي :

الشخص	الوظيفة	درجة الكفاءة
أ	١	٦
ب	٣	٧
جـ	٤	٩
د	٢	٩
هـ	٥	يُستبعد
مجموع الدرجات		٣١

ويبقى لنا بعد المناقشة السابقة الملاحظات التالية :

(١) إن طريقة التخصيص قد تعطي عدداً من الحلول البديله للمشكلة ، ويُستدل على ذلك بوجود الأعمدة والصفوف التي تحتوى على أكثر من صفر واحد في القوف النهائية . وفي مثل هذه الحالات فإنه على متخذ القرار أن يختار أى بديل من البدائل المتاحة ، وأن يكون على ثقة بأنه لا يمكن إجراء توزيع أفضل من ذلك .

(٢) إن إتباع طريقة التخصيص بالأسلوب السابق إيضاحه يصبح أمراً معقداً للغاية عندما يزداد عدد الصفوف والأعمدة بالشكل الذى يصعب معه رسم الخطوط أو تنفيذ الخطوات المشار إليها سابقاً . وفي مثل هذه الحالات يمكن حل مشاكل التخصيص باستخدام طريقة (السمبلكس) ، وهى أحد أساليب البرمجة الخطية التى تُستخدم فى هذا وعدد من الأغراض المشابهة .

(٦) نماذج التخصيص

بحوث العمليات

مثال (٥)

أربعة منتجات جديدة ترغب إحدى الشركات في إنتاجها للسوق ، ويمكن إنتاج هذه المنتجات في أى قسم من الأقسام الأربعة بالشركة ، غير أن معدل الإنتاج اليومي يختلف من قسم إلى آخر نتيجة إختلاف خبره ومهارات العمال بهذه الأقسام والمطلوب : تخصيص المنتجات الأربعة لهذه الأقسام بحيث يكون الإنتاج الكلى أكبر مايمكن ، إذا علمت أن معدل الإنتاج اليومي بكل قسم يظهر كما يلى :

المنتجات الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	١٠٠	٦٠	١٢٠	٨٠
الثانى	١٠٠	٨٠	١٤٠	١٠٠
الثالث	١١٠	٧٥	١٥٠	١٢٠
الرابع	٨٥	٥٠	١٠٠	٧٥

الحل :

حيث أن الهدف هنا هو تحقيق أكبر إنتاج ممكن ، فإن الخطوة الأولى تتمثل فى طرح جميع قيم المصفوفة من أكبر قيمة بها ، وأكبر قيمة بالمصفوفة = ١٥٠ ، وتكون المصفوفة الجديدة هى :

المنتجات الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	٥٠	٩٠	٣٠	٧٠
الثانى	٥٠	٧٠	١٠	٥٠
الثالث	٤٠	٧٥	صفر	٣٠
الرابع	٦٥	١٠٠	٥٠	٧٥

وتتمثل الخطوة التالية فى طرح أقل قيمة فى كل عمود من جميع قيم هذا العمود ، ويكون :

(٦) نماذج التخصيص

بحوث العمليات

المنتجات الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	١٠	٢٠	٣٠	٤٠
الثانى	١٠	صفر	١٠	٢٠
الثالث	صفر	٥	صفر	صفر
الرابع	٢٥	٣٠	٥٠	٤٥

وبطرح أقل قيمه فى كل صف من جميع قيم هذا الصف ، نحصل على المصفوفه التاليه :

المنتجات الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	صفر	١٠	٢٠	٣٠
الثانى	١٠	صفر	١٠	٢٠
الثالث	صفر	٥	صفر	صفر
الرابع	صفر	٥	٢٥	٢٠

المنتجات الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	صفر	٥	١٥	٢٥
الثانى	١٥	صفر	١٠	٢٠
الثالث	٥	٥	صفر	صفر
الرابع	صفر	صفر	٢٠	١٥

المنتجات الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	صفر	٥	٥	١٥
الثانى	١٥	صفر	صفر	١٠
الثالث	١٥	١٥	صفر	صفر
الرابع	صفر	صفر	١٠	٥

وعلى ذلك يكون التخصيص على النحو التالى :

بحوث العمليات (٦) نماذج التخصيص

معدل الإنتاج	التخصيص
١٠٠	القسم الأول / م يخصص لـ م
١٤٠	القسم الرابع / هـ يخصص لـ هـ
١٢٠	القسم الثاني / د يخصص لـ د
٥٠	القسم الثالث / ي يخصص لـ ي
٤١٠ أكبر ما يمكن	الإجمالي

مثال (٦)

فيما يلي الدرجات التي حصل عليها أربعة أشخاص تقدموا لشغل أربعة وظائف بإحدى الشركات . والمطلوب : توزيع هؤلاء الأشخاص على الوظائف الأربع بحيث يكون مستوى الكفاءة أكبر ما يمكن ؟

الوظائف الأشخاص	أ	ب	ج	د
١	٩	٤	٥	٩
٢	٥	١	٣	٦
٣	٦	٥	٤	٦
٤	٨	٤	٥	٦

الحل :

طرح قيم المصفوفة من أكبر قيمه بها وهي (٩) :

الوظائف الأشخاص	أ	ب	ج	د
١	صفر	٥	٤	صفر
٢	٤	٨	٦	٣
٣	٣	٤	٥	٣
٤	١	٥	٤	٣

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

طرح أقل قيمه فى كل عمود من جميع قيم ذلك العمود :

الأشخاص	الوظائف	أ	ب	ج	د
١	صفر	١	صفر	صفر	٣
٢	٤	٤	٢	٣	٣
٣	٣	صفر	١	٣	٣
٤	١	١	صفر	٣	٣

طرح أقل قيمه فى كل صف من جميع قيم ذلك الصف :

الأشخاص	الوظائف	أ	ب	ج	د
١	صفر	١	صفر	صفر	٣
٢	٢	٢	صفر	١	٣
٣	٣	صفر	١	٣	٣
٤	١	١	صفر	٣	٣

الأشخاص	الوظائف	أ	ب	ج	د
١	صفر	١	١	١	٣
٢	١	١	١	١	٣
٣	٣	صفر	٢	٢	٣
٤	صفر	صفر	صفر	٢	٢

وحيث أن عدد الخطوط = عدد الصفوف ، فنكون وصلنا للحل الأمثل ، ويتم التخصيص كما يلى :

درجة الكفاءة

٣ / ب	الشخص الثالث يُخصص للوظيفة ب	٥
١ / أ	الشخص الأول يُخصص للوظيفة أ	٩
٤ / ج	الشخص الرابع يُخصص للوظيفة ج	٥
٢ / د	الشخص الثانى يُخصص للوظيفة د	٦
الإجمالى	أكبر ما يمكن	٢٥

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

مثال (٧)

افترض وجود ثلاث أوامر إنتاجية يُراد تخصيصها للتشغيل على ثلاث آلات مختلفة ، بحيث يُعهد إلى كل آلة تشغيل أمر إنتاجي واحد ، فإذا كانت تكلفة تشغيل كل أمر من هذه الأوامر على كل نوع من أنواع تلك الآلات كما يلي :

الآلة \ الأمر الإنتاجي	(١)	(٢)	(٣)
١	٢٠	٢٧	٣٠
٢	١٠	١٨	١٦
٣	١٤	١٦	١٢

والمطلوب تخصيص كل أمر من هذه الأوامر على كل آلة من الآلات الثلاث بحيث يتم إنجاز هذه الأوامر بأقل تكلفة ممكنة ، ثم احسب هذه التكلفة ؟ .
الحل :

باختيار أصغر رقم في كل عمود وطرحه من جميع عناصر العمود ، الرقم ١٠ بالنسبة للعمود الأول ، والرقم ١٦ بالنسبة للعمود الثاني ، والرقم ١٢ بالنسبة للعمود الثالث ، نحصل على :

الآلة \ الأمر الإنتاجي	(١)	(٢)	(٣)
١	١٠	١١	١٨
٢	صفر	٢	٤
٣	٤	صفر	صفر

باختيار أصغر رقم في كل صف وطرحه من جميع عناصر الصف ، الرقم ١٠ بالنسبة للصف الأول ، والرقم صفر بالنسبة للصف الثاني ، والرقم صفر بالنسبة للصف الثالث ، نحصل على :

الآلة \ الأمر الإنتاجي	(١)	(٢)	(٣)
١	صفر	١	٨
٢	صفر	٢	٤
٣	٤	صفر	صفر

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

باختيار أصغر عنصر من العناصر الغير مغطاه (وهو الواحد) وطرحه من بقية العناصر الغير مغطاه وإضافته إلى جميع العناصر التي تقع عند تقاطع خطين نحصل على :

الآله	(١)	(٢)	(٣)
١	صفر	صفر	٧
٢	صفر	١	٣
٣	٥	صفر	صفر

وعلى ذلك يكون وصلنا للحل الأمثل الذي يحقق أقل تكلفه ، حيث يتم تشغيل الأمر الإنتاجي الأول على الآله الثانيه ، وتشغيل الأمر الإنتاجي الثاني على الآله الأولى ، وتشغيل الأمر الإنتاجي الثالث على الآله الثالثه ، ومن ثم تكون تكلفه تشغيل هذه الأوامر الإنتاجيه الثلاث كما يلي :

الأوامر	الآلات	التكلفه
١	٢	٢٧
٢	١	١٠
٣	٣	١٢
التكلفه الكليه		٤٩

مثال (٨)

حدد التخصيص الأمثل لأوامر الإنتاج التاليه على الآلات المتاحة في ضوء وقت التشغيل الموضح بالجدول التالي :

الآلات	أ	ب	ج	د
١	٨	٦	٢	٤
٢	٦	٧	١١	١٠
٣	٣	٥	٧	٦
٤	٥	١٠	١٢	٩

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

الحل :

بتطبيق خطوات التخصيص السابق توضيحها في هذا الفصل نحصل على جدول

الحل الأمثل التالي :

الأوامر	الآلات	أ	ب	جـ	د
١	٧	٣	صفر	صفر	صفر
٢	١	صفر	٥	٢	٢
٣	صفر	صفر	٣	صفر	صفر
٤	صفر	٣	٦	١	١

ومن هذا الحل الأمثل ، يتم تشغيل الأمر الإنتاجي الأول على الآلة جـ ،
وتشغيل الأمر الإنتاجي الثاني على الآلة ب ، وتشغيل الأمر الإنتاجي الثالث
على الآلة د ، وتشغيل الأمر الإنتاجي الرابع على الآلة أ ، ومن ثم يكون وقت
التشغيل كما يلي :

الأوامر	الآلات	وقت التشغيل
١	جـ	٢
٢	ب	٧
٣	د	٦
٤	أ	٥
إجمالي وقت التشغيل		٢٠

مثال (٩)

بفرض وجود أربعة وظائف يجب تخصيصها بالنسبة لأربعة مراكز أعمال ،
بحيث يتم تخصيص وظيفة واحدة فقط لكل مركز ، وكانت تكلفة إنجاز كل
وظيفة من خلال كل من مراكز العمل المختلفة كما يلي ؟

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

المركز الوظيفة	١	٢	٣	٤
أ	٥٠	٤٥	٥٠	٦٥
ب	٢٥	٤٠	٣٥	٢٠
ج	٦٥	٦٠	٥٥	٦٥
د	٥٥	٦٥	٧٥	٨٥

والمطلوب إستخدام طريقة التخصيص لتحديد الوظيفة التى يقوم بها كل مركز عمل بحيث يحقق الحد الأدنى للتكلفة الكلية ، واحسب مقدار هذه التكلفة ؟
الحل :

بتطبيق خطوات التخصيص السابق توضيحها فى هذا الفصل نحصل على جدول الحل الأمثل التالى :

المركز الوظيفة	١	٢	٣	٤
أ	٥	صفر	٥	٢٠
ب	٥	٢٠	١٥	صفر
ج	١٠	٥	صفر	١٠
د	صفر	١٠	٢٠	٣٠

ومن هذا الحل الأمثل ، يتم شغل الوظيفة (أ) بمركز العمل (٢) ، و يتم شغل الوظيفة (ب) بمركز العمل (٤) ، و يتم شغل الوظيفة (ج) بمركز العمل (٣) ، و يتم شغل الوظيفة (د) بمركز العمل (١) ، ويكون :

الوظيفة	مركز العمل	التكلفة
أ	٢	٤٥
ب	٤	٢٠
ج	٣	٥٥
د	١	٥٥
التكلفة الإجمالية		١٧٥

(٦) نماذج التخصيص

بحوث العمليات

مثال (١٠)

الجدول التالي يبين تكاليف إنجاز أربعة مشاريع من خلال أربعة من العاملين المتخصصين بحيث يقوم كل عامل متخصص بتأدية مشروع واحد فقط :

المشروع العامل	١	٢	٣	٤
أ	٣٠٠	٣٢٥	٥٠٠	٣٥٠
ب	٤٠٠	٥٢٥	٥٧٥	٦٠٠
ج	٣٥٠	٤٠٠	٦٠٠	٥٠٠
د	٤٠٠	٣٥٠	٤٥٠	٤٥٠

والمطلوب تخصيص هذه المشروعات على العمال الأربعة بما يحقق الحد الأدنى للتكلفة الكلية ، واحسب مقدار تلك التكلفة ؟

الحل :

بتطبيق خطوات التخصيص السابق توضيحها في هذا الفصل نحصل على جدول الحل الأمثل التالي :

المشروع العامل	١	٢	٣	٤
أ	٥٠	٢٥	١٠٠	صفر
ب	صفر	٧٥	٢٥	١٠٠
ج	صفر	صفر	١٠٠	٥٠
د	١٠٠	صفر	صفر	٥٠

يتضح أنه يجب أن يتم التخصيص للمشروعات الأربعة على العاملين كما يلي :

العامل	المشروع	التكلفة
أ	٤	٣٥٠
ب	١	٤٠٠
ج	٢	٤٠٠
د	٣	٤٥٠
التكلفة الكلية (أدنى تكلفة كلية ممكنة)		١٦٠٠

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

مثال (١١)

تمتلك شركة مصر للطيران ثلاث ورش صيانة تحتفظ كل منها بموتور احتياطي للطائرة البوينج ٧٤٧ في كل من نيويورك ولندن ونيودلهي ، وإذا تعطلت إحدى الطائرات بأي مدينة واحتاجت إلى موتور إضافي نقل الموتور من أحد الورش الثلاث إلى مكان تواجد الطائرة، وفي صباح ذات يوم تلقى مدير غرفة عمليات الشركة بالقاهرة ٣ بلاغات بأن هناك ٣ طائرات في كل من أثينا والبحرين وسليزبورج في حاجة إلى مواتير ، والجدول التالي يبين تكلفة نقل الموتور من أماكن تخزينها إلى أماكن تواجد الطائرات :

من	إلى	التكلفة بالدولار
نيويورك	أثينا	٧٠٠
	البحرين	١٠٠٠
	سليزبورج	٥٠٠
لندن	أثينا	٤٠٠
	البحرين	٨٠٠
	سليزبورج	٧٠٠
نيودلهي	أثينا	١١٠٠
	البحرين	٧٠٠
	سليزبورج	١٥٠٠

والمطلوب :

١. إلى أي مدينة يجب شحن المواتير الثلاث .
٢. إذا عرضت خطوط الطيران الأولمبية باليونان إمداد شركة مصر للطيران بموتور لإصلاح الطائرة الموجودة في أثينا وذاك نظير تكلفة ٣٠٠ دولار ، فهل تقبل شركة مصر للطيران هذا العرض ؟

٦) نماذج التخصيص

٣) العمليات

٣. إذا كانت شركة مصر للطيران قد احتفظت بموتور ثان بمخازنها بلندن نظير تكلفة تخزين قدرها ٢٠٠ دولار فهل تعتقد أن هذا الأمر مفيد للشركة؟

جـ :

بناء جدول التخصيص الذي يعبر عن المشكلة :

من / إلى	أثينا	البحرين	سالتزبورج
نيويورك	٧٠٠	١٠٠٠	٥٠٠
لندن	٤٠٠	٨٠٠	٧٠٠
نيو دلهي	١١٠٠	٧٠٠	١٥٠٠

من / إلى	أثينا	البحرين	سالتزبورج
نيويورك	٢٠٠	٥٠٠	صفر
لندن	صفر	٤٠٠	٣٠٠
نيو دلهي	٤٠٠	صفر	٨٠٠

من هنا نجد أن :

عدد الخطوط = عدد الصفوف = عدد الأعمدة = ٣ ، ويمكن البدء في عملية

تخصيص .

التكلفة	من نيويورك	إلى سالتزبورج
٥٠٠	من لندن	إلى أثينا
٤٠٠	من نيو دلهي	إلى البحرين
١٦٠٠		

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

٢- دراسة عرض خطوط الطيران الأولمبية :

ووفقاً لهذا العرض نكون المصفوفة التالية :

من / إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج	عمود جديد
نيويورك	٢٠٠	٥٠٠	صفر	صفر
لندن	صفر	٤٠٠	٣٠٠	صفر
نيو دلهي	٤٠٠	صفر	٨٠٠	صفر
أثينا	٣٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	صفر

من / إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج	عمود جديد
نيويورك	٤٠٠	٣٠٠	صفر	صفر
لندن	١٠٠	١٠٠	٢٠٠	صفر
نيو دلهي	٨٠٠	صفر	١٠٠٠	صفر
أثينا	صفر	١٣٠٠	١٥٠٠	صفر

التكلفة	
٥٠٠	نيويورك / سالزبورج
٧٠٠	نيو دلهي / البحرين
٣٠٠	أثينا / أثينا
١٥٠٠	

ولا يوجد تخصيص للنندن .

بحوث العمليات

(٦) نماذج التخصيص

٣- في حالة وجود موتور ثان بلندن :

من / إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج	عمود جديد
نيويورك	٧٠٠	١٠٠٠	٥٠٠	صفر
لندن (١)	٤٠٠	٨٠٠	٧٠٠	صفر
لندن (٢)	٦٠٠	١٠٠٠	٩٠٠	صفر
نيودلهي	١١٠٠	٧٠٠	١٥٠٠	صفر

من / إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج	عمود جديد
نيويورك	٣٠٠	٣٠٠	صفر	صفر
لندن (١)	صفر	٢٠٠	٢٠٠	صفر
لندن (٢)	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	صفر
نيودلهي	٧٠٠	صفر	١٠٠٠	صفر

ويكون التخصيص :

التكلفة	
٥٠٠	نيويورك / سالزبورج
٤٠٠	لندن (١) / أثينا
٧٠٠	نيودلهي / البحرين
١٦٠٠	

ويكون اجمالي التكاليف ١٦٠٠ ، وهو نفس التخصيص الوارد في المطلوب الأول ، وهذا يعنى رفض الإحتفاظ بماتور ثان بمخازن الشركة بلندن .

توزيع على نماذج التخصيص

(١) حصلت إحدى الشركات على خمس عطاءات لإصلاح وصيانة الآلات والمعدات الموجودة بأقسامها الإنتاجية الأربعة ، وفيمايلي قيمة العطاءات التي تقدم بها كل مقاول ، والمطلوب إختيار وتخصيص أنسب المقاولين لإتمام عمليات الصيانة بأقل تكلفه إجمالية ممكنه :

قسم المقاول	قسم (١)	قسم (٢)	قسم (٣)	قسم (٤)
أ	١٠٠٠	١٢٠٠	١٠٠٠	١٢٠٠
ب	١١٠٠	١٤٠٠	١٣٠٠	١٢٠٠
جـ	١٢٠٠	١١٠٠	١٢٠٠	١٠٠٠
د	١٣٠٠	١٣٠٠	١٠٠٠	١٣٠٠
هـ	١٢٥٠	١٢٥٠	١٢٥٠	١٢٥٠

(٢) تتولى إحدى الشركات توزيع منتجاتها فى عدة مناطق بيعيه ، وتقوم بمحاسبة مندوبى البيع على أساس راتب ثابت بالإضافة إلى مبلغ محدد عن كل كيلومتر يسافره المندوب من الفرع الذى يوجد به إلى المناطق البيعية التى يتولى تصريف منتجات الشركة بها ، وتوجد فروع الشركة فى أربعة مواقع هى (س ، ص ، ع ، ل) ، وتنقسم المناطق البيعية للشركة إلى ثلاث مناطق هى (أ ، ب ، جـ) ، وفيما يلي مسافة السفر من كل موقع إلى كل منطقه ، والمطلوب تحديد من أى فروع الشركة يتم تخصيص المندوبين للمواقع بحيث يكون إجمالى مسافات السفر أقل ما يمكن .

المنطقة البيعية	(أ)	(ب)	(جـ)
مواقع الفروع			
س	٥٠	٣٦	١٦
ص	٢٨	٣٠	١٨
ع	٣٥	٣٢	٢٠
ل	٢٥	٢٥	١٤

(٣) أربعة عمليات إنتاجية ضرورية لتصنيع أحد المنتجات ، ويمكن أداء هذه العمليات الأربع على أى آلة من الآلات الأربع المتاحة لدى الشركة ، ولكن وقت التصنيع يختلف من آلة لأخرى ، حسب عمرها أو مدة إستخدامها فى الشركة ، وذلك على النحو التالى فيما بعد .

والمطلوب : تحديد أى العمليات الإنتاجية يتم أدائه على كل آلة بحيث يكون الوقت الإجمالى أقل ما يمكن ، مع العلم بأن الآله التى عمرها ٦ سنوات لايمكنها أداء العملية جـ بأي حال من الأحوال :

العمليات الآلات	أ	ب	جـ	د
آله جديده	٨	٦	١٠	١٥
آله عمرها ٢ سنه	١١	١٠	١٢	٢٠
آله عمرها ٤ سنه	١٢	١٢	١٢	٢٢
آله عمرها ٦ سنه	١٨	٢٠	--	٢٥

(٤) أربعة منتجات جديده ترغب إحدى الشركات فى إنتاجها للسوق ، ويمكن إنتاج هذه المنتجات فى أى قسم من الأقسام الأربعة بالشركة ، غير أن معدل الإنتاج اليومى يختلف من قسم لآخر نتيجة إختلاف الخبرة ومهارات العمال بهذه الأقسام ، والمطلوب تخصيص المنتجات الأربعة لهذه الأقسام بحيث يكون الناتج الكلى أكبر ما يمكن ، إذا علمت أن معدل الإنتاج اليومى بكل قسم يظهر كما يلى :

المنتجات الأقسام	م	هـ	د	ى
القسم الأول	١٠٠	٦٠	١٢٠	٨٠
القسم الثانى	١٠٠	٨٠	١٤٠	١٠٠
القسم الثالث	١١٠	٧٥	١٥٠	١٢٠
القسم الرابع	٨٥	٥٠	١٠٠	٧٥

الفصل السابع

نظرية صفوف الإنتظار

The Queuing Theory

تنشأ مشكلة صفوف الإنتظار فى حالتين :

الأولى : إذا كان معدل وصول العملاء وطالبي الخدمة سريعاً بدرجة تفوق معدل

أداء الخدمة من جانب من يعمل بمركز الخدمة .

الثانية : إذا كان معدل أداء الخدمة أسرع من معدل وصول العملاء ، بمعنى

وجود وحدات تأدية خدمه عاطله بدون عمل .

وتهدف نظرية صفوف الإنتظار إلى علاج مشكلات الإنتظار بشقيها

حتى نصل إلى الموقف الأمثل الذى يحقق خفضاً فى وقت الإنتظار لكل من

العملاء طالبي الخدمة ، ووحدات تأدية الخدمة ، بحيث تصبح تكلفة الإنتظار

أقل ما يمكن وتستخدم نظرية صفوف الإنتظار على نطاق واسع فى جميع

المنشآت الإنتاجيه والخدميه كوسيله رياضيه لخدمة الإداره ، فنجد مثلاً فى

شركه صناعيه أن الطلب على قطع الغيار والمواد الخام من جانب عمال

المصنع قد يزيد فى أحوال كثيره عن طاقة موظفى المخزن ، وهنا يضطر

العمال للوقوف وقتاً طويلاً أمام المخزن حتى يتسنى لهم صرف ما يحتاجونه

ومما سبق يتضح أن هناك شرطين أساسيين لتطبيق نظرية صفوف

الإنتظار ، وهما :

(١) وجود وحدات من طالبي الخدمة مثل العملاء ، الطائرات ، السفن ،

الآلات ، السيارات ، المرضى ، إلخ .

(٢) وجود وحدات لتأدية الخدمة مثل : البنوك ، الموانئ ، المطارات ،

وحدات الصيانه ، محطات البنزين ، المستشفيات ، إلخ .

وذلك مع وجود زياده فى معدل وصول وحدات طالبي الخدمة تفوق طاقة

الوحدات مقدمة الخدمة أو العكس .

٣. العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

وقد يرى البعض أنه من الممكن حل هذه المشاكل عن طريق زيادة مراكز الخدمة (الوحدات مقدمة الخدمة) بدرجة تمكنها من تلبية طلبات الخدمة ، إلا أن ذلك يعني ببساطة زياده كبيره فى التكاليف ، ومن ناحية ثانت الطاقة المتاحة للوحدات مقدمة الخدمة قاصره عن تلبية طلبات طالب مه ، فإن ذلك معناه ضياع فرص متاحه (إنصراف طالبي الخدمة لأنهم لم يوا الإنتظار الطويل) .

ولدراسة نظرية صفوف الإنتظار وتطبيقها ، يتعين معرفة :

- (وقت حضور طالبي الخدمة فى المتوسط .
- (متوسط وقت أداء الخدمة .
- (عدد مراكز الخدمة الموجوده .

كالتيف الكلية المتوقعة:

تقسيم التكاليف الكلية المتوقعة إلى قسمين :

١. تكاليف وقت الإنتظار .
 ٢. تكاليف أداء الخدمة (تكاليف مستوى الخدمة) .
- تحديد الحجم الأمثل لمستوى الخدمة ، وتحديد علاقة تكاليف وقت الإنتظار بـ تكاليف مستوى الخدمة نتناول الأمثلة التالية :

(١) .

لـ مصر لأعمال الشحن والتفريغ تقدم خدماتها بواسطة فرق عمل ، ويمكن عمل فريق عمل واحد أو فريقين أو ثلاث فرق عمل (تكلفة تشغيل كل فريق ٥٠ جنيه) وكل سفينة تستغرق ١٠ أيام لـ حين تفريغها في حالة تشغيل قى عمل واحد ، ٦ أيام في حالة تشغيل فريقين ، ٤ أيام في حالة تشغيل ٣ فرق ، كما أن يوم الإنتظار الواحد يكلف السفينة ٢٠٠٠ جنيه ، وأن سـط عدد السفن التي تصل في اليوم الواحد = ١٠ سفن مطلوب : تحديد عدد فرق العمل الأمثل الذي يؤدي إلى وصول التكلفة إلى قدر ممكن ؟

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

في هذه الحالة ، يكون :

عدد فرق العمل			بيان
(٣)	(٢)	(١)	
١٠	١٠	١٠	١- عدد السفن التي تصل يومياً
٤	٦	١٠	٢- معدل وقت انتظار السفينة باليوم
٤٠	٦٠	١٠٠	٣- وقت الإنتظار الكلي باليوم
٨٠٠٠٠	١٢٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠	٤- تكاليف الإنتظار بالجنيه
١٥٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	٥٠٠٠٠	٥- أجور فرق العمل
٢٣٠٠٠٠	٢٢٠٠٠٠	٢٥٠٠٠٠	٦- التكاليف الكلية

ومن الجدول السابق يتضح أن الحل الأمثل تشغيل مجموعتي عمل للوصول بالتكلفة إلى أقل قدر ممكن .

وتظهر مشكلة صفوف الإنتظار من خلال تفاعل العناصر التالية :

(١) معدل الوصول :

متوسط عدد الوحدات الواردة خلال وحدة زمن معينة (دقيقة ، ساعة ، يوم ، أسبوع ، ... الخ) .

(٢) معدل تأدية الخدمة :

متوسط عدد الوحدات التي تُخدم في مركز الخدمة خلال وحدة زمن معينة (دقيقة ، ساعة ، يوم ، أسبوع ، ... الخ) .

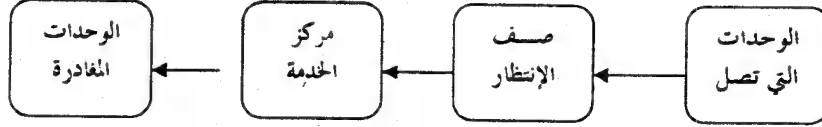
(٣) نظام الخدمة :

المفروض في صفوف الإنتظار تحقيق قاعدة الوارد أولاً يُخدم أولاً ، وأيضاً العمل في مركز واحد تُخدمة أو عدة مراكز للخدمة .

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

وسنقتصر في هذه الدراسة على نموذج خط الإنتظار ذو مركز الخدمة
الواحد (قناة واحدة)



نظام خطوط الإنتظار

نموذج صف الإنتظار ذات القناة الواحدة

يشير مصطلح "قناة" إلى عدد مواقع الدخول إلى نظام الخدمة ، وتعني القناة الواحدة ، أنه يوجد موقع واحد للدخول . ويُعتبر نموذج صف الإنتظار ذات القناة الواحدة من أكثر نماذج صفوف الإنتظار استخداماً وأكثرها سهولة ، ويقوم هذا النموذج على الافتراضات الآتية :

- (١) يتم خدمة الوحدات طالبة الخدمة على أساس أن الوحدات التي تصل أولاً تُخدم أولاً .
- (٢) ينتظر كل طالب خدمة حتى يتم خدمته بصرف النظر عن طول الصف .
- (٣) تكون الوحدات طالبة الخدمة مستقلة عن الوحدات السابقة عليها ، ولكن متوسط عدد الوحدات طالبة الخدمة (معدل الوصول) لا يتغير بمرور الوقت .
- (٤) يتم تصوير الوحدات طالبة الخدمة باستخدام توزيع بواسون الاحتمالي ، وتصل هذه الوحدات من مجتمع غير محدود (كبير جداً) .
- (٥) تختلف أوقات الخدمة من عميل لآخر ، وتكون هذه الأوقات مستقلة بالنسبة لكل عميل ، ولكن يكون متوسط المعدل الخاص بها معطوم .

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

- (٦) تظهر أوقات الخدمة طبقاً للتوزيع الإحتمالى الأسى السالب .
- (٧) أن متوسط معدل الخدمة أكبر من متوسط معدل الوصول .
- (٨) يُعتبر نظام الصف نظام ثابت .

وعندما تتوافر هذه الافتراضات ، فإنه يمكن تكوين مجموعه من المعادلات التى تحدد الخصائص التشغيلية لصف الإنتظار والمستخدمه بصورة شائعته ، ويُستخدم فى هذه المعادلات الرموز التالية :

[أ] : معدل الوصول ، أى متوسط عدد العملاء خلال فتره زمنيه معينه (ساعه مثلاً) .

[ب] : معدل أداء الخدمه ، أى متوسط عدد الوحدات التى يتم خدمتها خلال فتره زمنيه معينه (ساعه مثلاً) .

وتُستخدم المعادلات التالية فى نموذج صف الإنتظار ذات القناه الواحده :

(١) س : متوسط عدد طالبي الخدمه (العملاء) فى النظام (عدد طالبي الخدمه فى الصف ، بالإضافة إلى العدد الذى يتلقى الخدمه) .

$$س = \frac{أ}{ب - أ}$$

(٢) ص : متوسط الوقت الذى يقضيه طالب الخدمه فى النظام (الوقت المنقضى فى الصف ، بالإضافة إلى الوقت المنقضى فى تقديم الخدمه) .

$$ص = \frac{١}{ب - أ}$$

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

(٣) س و : متوسط عدد طالبي الخدمة (العملاء) في الصف .

$$س و = \frac{٢١}{ب (١ - ب)}$$

(٤) ص و : متوسط وقت الإنتظار في الصف .

$$ص و = \frac{١}{ب (١ - ب)}$$

(٥) خ : معامل الإستخدام في النظام ، بمعنى إحتمال أن يكون جهاز خدمه مُستخدم - كثافة التشغيل ، أي إحتمال إنتظار عميل واحد بصف إنتظار :

$$خ = \frac{١}{ب}$$

(٦) ل صر : إحتمال عدم وجود طالب خدمه بالنظام :

$$ل صر = ١ - \frac{١}{ب}$$

(٧) ل ن : إحتمال وجود عدد (ن) من طالبي الخدمة في النظام :

$$ل ن = \left(\frac{١}{ب} - ١ \right) \times \left(\frac{١}{ب} \right)^ن$$

(٨) ل (ن < ك) : إحتمال أن يكون عدد العملاء في الصف أكبر من ك ، حيث أن ك يمثل رقم عشوائى :

$$ل (ن < ك) = \left(\frac{١}{ب} \right)^{١-ك}$$

مثال (٢)

صاحب ورشه لتصليح السيارات لديه عامل ميكانيكى واحد يقوم بتركيب ملفات السيارات ، ويستطيع هذا العامل تركيب ملفات جديد بمعدل متوسط قدره ثلاثة ملفات فى اليوم ، (أى حوالى ٢٠ دقيقة لكل سياره) ، ويصل العملاء الذين يحتاجون هذه الخدمة إلى الورشه بمتوسط سيارتين فى اليوم ، ومن ثم ، فإن $2 = \lambda$ ، $3 = \mu$

وحيث أن $\lambda > \mu$ ، فإننا نستخدم العلاقات التالية :

$$(1) \quad S = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3 - 2} = 2 \text{ سياره}$$

أى أنه يوجد فى المتوسط ٢ عميل فى النظام .

$$(2) \quad W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 2} = 1 \text{ ساعه}$$

أى أن كل عميل يقضى ، فى المتوسط ساعه فى النظام .

$$(3) \quad S_w = \frac{\lambda W}{\mu - \lambda} = \frac{2 \times 1}{3 - 2} = 2 \text{ سياره}$$

بمعنى أنه يوجد ٢ سياره تنتظر فى الصف للحصول على الخدمة .

$$(4) \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3(3 - 2)} = \frac{2}{3} \text{ ساعه} = 40 \text{ دقيقه}$$

بمعنى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ، ٤٠ دقيقه فى صف الإنتظار

$$(5) \quad P_0 = \frac{\mu - \lambda}{\mu} = \frac{3 - 2}{3} = 0.67$$

بمعنى إحتمال أن يكون العامل مشغول = ٠.٦٧

حوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

$$(٦) \text{ ل مسر } = ١ - \frac{١}{ب} = ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣} = ٠,٣٣$$

بمعنى أن احتمال عدم وجود أي سياره فى النظام = ٠,٣٣

(٧) احتمال وجود (ن) من السيارات (وليكن ٣ سيارات) فى النظام =

$$ل١ = \left(\frac{١}{ب} \right) \times \left(\frac{١}{ب} - ١ \right)$$

$$ل٢ = \left(\frac{٢}{٣} \right) \times \left(\frac{٢}{٣} - ١ \right)$$

$$٠,٠٩٨ = \frac{٨}{٨١} = \frac{٨}{٢٧} \times \frac{١}{٣} =$$

(٨) ل (ن < ك) : احتمال أن يكون عدد العملاء فى الصف أكبر من ك ، حيث أن ك = رقم عشوائى ، يجب توزيع الإحتمالات المجمعه للسيارات فى ف الإنتظار كالتالى :

ك	ل (ن < ك) = $\left(\frac{١}{ب} \right)^{١+ك}$
صفر	٠,٦٦٧
١	٠,٤٤٤
٢	٠,٢٩٦
٣	٠,١٩٨
٤	٠,١٣٢
٥	٠,٠٨٨
٦	٠,٠٥٨
٧	٠,٠٣٩

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

والآن بعد أن قام صاحب الورشه بحساب خصائص نظام الصفوف ، قرر أن يقوم بتحليل تأثير هذه الخصائص إقتصادياً ، ويعتبر نموذج صفوف الإنتظار ذو أهميه كبرى في التنبؤ بالأوقات المحتمله للإنتظار ، طول الصف ، الأوقات العاطله ، وهكذا . ومع ذلك فإن هذا النموذج لا يحدد القرارات المثلى الواجب إتخاذها ، كما أنه لم يأخذ في إعتباره العوامل المتعلقه بالتكلفه .

وحيث أن حل مشكلة الصفوف يتطلب من الإدارة أن تقوم بالمفاضله بين تكلفه متزايدة لتوفير خدمه أفضل وتكلفه إنتظار متناقصه نتيجة توفير الخدمه .

وقد قدر صاحب الورشه أن تكلفه وقت إنتظار العميل في صورة عدم رضاء العميل وخسارة شهرة الورشه بمبلغ ١٠ جنيهات في كل ساعه من الوقت المنقضى في الإنتظار ، وحيث أن متوسط وقت الإنتظار في الصف $\frac{2}{3}$ ساعه ، وتصل ١٦ سياره في المتوسط إلى الورشه كل يوم (بفرض أن عدد ساعات العمل بالورشه ٨ ساعات يومياً) ، فإن إجمالي عدد الساعات التي تقضيها السيارات في الإنتظار كل يوم تبلغ :

$$\frac{32}{3} = 16 \times \frac{2}{3} \text{ ساعه}$$

ومن ثم ، تكون :

$$\text{تكلفه إنتظار العميل} = 10 \text{ جنيه في الساعه} \times \frac{32}{3} \text{ ساعه/يوم} = 106 \text{ جنيه}$$

والتكلفه الأخرى المهمه التي يمكن لصاحب الورشه أن يحددها في موقع الصف هي أجر الميكانيكى الذى يعمل لديه ، وبفرض أن الميكانيكى يحصل على ٣ جنيه في الساعه ، أي ٢٤ جنيه في اليوم .

ومن ثم فإن : التكاليف تبلغ $106 + 24 = 130$ جنيه في اليوم

وقد علم صاحب الورشه أنه يوجد ميكانيكى آخر أكثر كفاءه من الميكانيكى الذى يعمل لديه ، حيث أنه يستطيع أن يركب ٤ ملفات فى الساعه ، ولكنه يحصل على أجر قدره ٤ جنيه فى الساعه ، وقد قام صاحب الورشه أولاً بإعادة حساب الخصائص التشغيليه باستخدام معدل الخدمه الجديد وهو ٤ ملفات فى الساعه ، أي أن :

$$أ = ٢ \text{ سياره كل ساعه}$$

$$ب = ٤ \text{ سيارات يتم خدمتها كل ساعه ، وعلى ذلك ، فإن :}$$

$$(١) \text{ س} = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{٢}{٤ - ٢} = ١ \text{ سياره}$$

أي أنه يوجد فى المتوسط ١ عميل فى النظام .

$$(٢) \text{ ص} = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{٤ - ٢} = \frac{١}{٢} \text{ ساعه فى المتوسط}$$

$$(٣) \text{ س و} = \frac{أ}{ب(ب - أ)} = \frac{٢}{٤(٤ - ٢)} = \frac{١}{٢} \text{ سياره}$$

بمعنى أنه يوجد $\frac{١}{٢}$ سياره تنتظر فى الصف للحصول على الخدمه .

$$(٤) \text{ ص و} = \frac{أ}{ب(ب - أ)} = \frac{٢}{٤(٤ - ٢)} = \frac{٢}{٨} \text{ ساعه} = ١٥ \text{ دقيقه}$$

بمعنى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ، ١٥ دقيقه فى صف الإنتظار

$$(٥) \text{ خ} = \frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} = ٠,٥٠ \text{ إحتمال أن يكون العامل مشغول}$$

$$(٦) \text{ ل مر} = ١ - \frac{أ}{ب} = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} = ٠,٥٠$$

بمعنى أن إحتمال عدم وجود أي سياره فى النظام = ٠,٥٠

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

(٧) ل (ن < ك) : احتمال أن يكون عدد العملاء في الصف أكبر من ك ،
يُحسب كالآتي :

ك	ل (ن < ك) = $\left(\frac{أ}{ب} \right)^{١+ك}$
صفر	٠,٥٠٠
١	٠,٢٥٠
٢	٠,١٢٥
٣	٠,٠٦٢
٤	٠,٠٣١
٥	٠,٠١٦
٦	٠,٠٠٨
٧	٠,٠٠٤

يتضح مما سبق أن سرعة الميكانيكى الجديد سوف تؤدي إلى إختصار طول صف الإنتظار ، وأوقات الإنتظار ، وعلى سبيل المثال ، فإن العميل سوف يقضى الآن (نصف ساعه) فى المتوسط فى النظام ، ويقضى (ربع ساعه) فى الصف ، وذلك مقابل قضاء ساعه فى النظام ، (وتلثي ساعه) فى صف الإنتظار فى ظل إستخدام الميكانيكى الحالى .

ومن ثم ، فإن الساعات الكليه التى يقضيها العملاء فى الإنتظار فى حالة وجود الميكانيكى الجديد فى الخدمه =

$$= (١٦ \text{ سياره فى اليوم}) \times (٠,٢٥ \text{ ساعه / سياره}) = ٤ \text{ ساعات}$$

وتكون :

• تكلفة إنتظار العميل = ١٠ جنيه فى الساعه × ٤ ساعات = ٤٠ جنيه فى اليوم

•• تكلفه إستخدام العامل الجديد = ٨ ساعات فى اليوم × ٤ جنيه للساعه

$$= ٣٢ \text{ جنيه فى اليوم}$$

ومن ثم فإن : التكاليف الكليه = ٤٠ + ٣٢ = ٧٢ جنيه فى اليوم

ث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

ث أن التكلفة الكلية المتوقعة في اليوم في ظل استخدام العامل القديم =
١ جنيه ، فإن اقرار السليم هو استئجار ذلك الميكانيكي الجديد ، وبذلك
نض التكاليف بمقدار = $١٣٠ - ٧٢ = ٥٨$ جنيه في اليوم .

، (٣)

تعمل الوحدة العلاجية بإحدى الشركات لمدة ٢٤ ساعة يومياً ، ويصل
المتريدين عشوائياً بمعدل (٤) في الساعة ، وتستطيع الوحدة خدمة
(منهم في الساعة في المتوسط . فإذا علمت أن تكلفة وقت المتريدين
الساعة ٥ جنيه

ملوب :

إيجاد متوسط عدد المتريدين في خط الإنتظار في النظام ؟
إيجاد متوسط عدد المتريدين في خط الإنتظار قبل بدء الخدمة ؟
إيجاد متوسط وقت إنتظار المتردد شاملاً وقت الخدمة ؟
إيجاد متوسط وقت إنتظار المتردد قبل بدء الخدمة ؟
إيجاد متوسط وقت المتريدين الضائع في الإنتظار يومياً قبل بدء الخدمة ؟
التكلفة اليومية للإنتظار ؟

ما تأثير زيادة معدل الخدمة إلى (٦) بدلاً من (٥) ؟

مل :

$$١ = أ$$

$$٥ = ب$$

(متوسط عدد المتريدين في خط الإنتظار في النظام =

$$س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{٤}{٥ - ٤} = ٤ : عامل$$

(٢) متوسط عدد المترددين في خط الإنتظار قبل بدء الخدمة =

$$س و = \frac{أ}{ب (أ - ب)} = \frac{٢٤}{(٤ - ٥) ٥} = \frac{١٦}{٥} = ٣,٢ \text{ عامل}$$

(٣) متوسط وقت إنتظار المتردد شاملاً وقت الخدمة = ص :

$$ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{٤ - ٥} = ١ \text{ ساعة في المتوسط}$$

(٤) متوسط وقت إنتظار المتردد قبل بدء الخدمة = ص ر :

$$ص و = \frac{أ}{ب (أ - ب)} = \frac{٤}{(٤ - ٥) ٥} = \frac{٤}{٥} = ٠,٨ \text{ دقيقة}$$

بمعنى أن كل سياره سوف تقضى في المتوسط ، ٤٨ دقيقة في صف الإنتظار

(٥) متوسط وقت المترددين الضائع في الإنتظار يومياً قبل بدء الخدمة =

$$أ = \text{عدد ساعات العمل} \times ص و$$

$$= ٤ \times ٢٤ \times ٠,٨ = ٧٦,٨ \text{ ساعة}$$

(٦) التكلفة اليومية للإنتظار = ٧٦,٨ × ٥ = ٣٨٤ جنيه .

(٧) تأثير زيادة معدل الخدمة إلى (٦) بدلاً من (٥) :

إذا عدلت المنشأة معدل أداء الخدمة وأصبح (٦) متردد في الساعة

بدلاً من (٥) مترددين ، يكون :

$$أ = ٤ ، ب = ٦$$

$$ص و = \frac{أ}{ب (أ - ب)}$$

$$= \frac{٤}{(٤ - ٦) ٦} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣} \text{ ساعة}$$

وث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

فى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ، ٢٠ دقيقه فى صف الإنتظار
سط وقت المترددين الضائع فى الإنتظار = أ × عدد ساعات العمل × ص ر

$$= \frac{1}{3} \times 24 \times 4 = 32 \text{ ساعه} .$$

لغه الكليه للإنتظار = ٣٢ × ٥ = ١٦٠ جنيه

فى ذلك ننصح الشركه بالتعديل لأنه أقل تكلفه ويحقق وفراً قدره :

$$= 160 - 384 = 224 \text{ جنيه}$$

ل (٤)

عد فى أحد السنازن (٦) عمال : وطاقة هؤلاء العمال هو تحميل ٣
يات فى الساعه ، وأن العربات تصل بمعدل عربتين فى الساعه ، وقد قدم
مدير الشركه إقتراح بزيادة عدد عمال الشحن والتفريغ . وكانت
تراحات هى زيادة عدد العمال إلى (٨ أو ١٠ أو ١٢) عامل ، فإذا علمت
أجر العامل الواحد فى الساعه = ٠,٥ جنيه ، وأن مدة العمل = ٨ ساعات
اليف إنتظار العربيه بدون تحميل = ٢ جنيه فى الساعه .
مطلوب : تحديد أفضل حجم للعماله فى هذا المخزن ؟

سل :

اثل المتاحة هى ٤ بدائل على النحو التالى :

عدد العمال	معدل الوصول (أ)	معدل الخدمه (ب)	البدائل
٦	٢	٣	الأول (الحالى)
٨	٢	٤	الثانى
١٠	٢	٥	الثالث
١٢	٢	٦	الرابع

وق تـ اـ لـ كل بديل على النحو التالى :

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

[X] البديل الأول:

وقت إنتظار الوحدة في اليوم = ص :

$$ص = \frac{1}{ب - أ} = \frac{1}{٣ - ٢} = ١ \text{ ساعة في المتوسط}$$

إجمالي وقت الإنتظار لجميع الوحدات = أ × عدد الساعات × ص

$$= ٢ \times ٨ \times ١ = ١٦ \text{ ساعة}$$

تكلفة الإنتظار = إجمالي وقت الإنتظار × تكلفة إنتظار الوحدة

$$= ٢ \times ١٦ = ٣٢ \text{ جنيه .}$$

تكلفة الخدمة = عدد العمال × ساعات العمل × أجر العامل في الساعة

$$= ٦ \times ٨ \times ٠,٥ = ٢٤ \text{ جنيه .}$$

التكلفة الكلية = تكلفة الإنتظار + تكلفة الخدمة = ٢٤ + ٣٢ = ٥٦ جنيه .

[X] البديل الثاني:

وقت إنتظار الوحدة في اليوم = ص =

$$ص = \frac{1}{ب - أ} = \frac{1}{٤ - ٢} = ٠,٥ \text{ ساعة في المتوسط}$$

إجمالي وقت الإنتظار لجميع الوحدات = أ × عدد الساعات × ص

$$= ٢ \times ٨ \times ٠,٥ = ٨ \text{ ساعات .}$$

تكلفة الإنتظار = إجمالي وقت الإنتظار × تكلفة إنتظار الوحدة

$$= ٨ \times ٢ = ١٦ \text{ جنيه .}$$

تكلفة الخدمة = عدد العمال × ساعات العمل × أجر العامل في الساعة

$$= ٨ \times ٨ \times ٠,٥ = ٣٢ \text{ جنيه .}$$

التكلفة الكلية = تكلفة الإنتظار + تكلفة الخدمة = ٣٢ + ١٦ = ٤٨ جنيه .

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

⊗ البديل الثالث :

وقت إنتظار الوحدة في اليوم = ص =

$$ص = \frac{1}{ب - أ} = \frac{1}{٢ - ٥} = \frac{1}{٣} \text{ ساعة في المتوسط}$$

إجمالي وقت الإنتظار لجميع الوحدات = أ × عدد الساعات × ص

$$\text{إجمالي وقت الإنتظار لجميع الوحدات} = ٢ \times ٨ \times \frac{1}{٣} = ٥,٣٣ \text{ ساعة}$$

- تكلفة الإنتظار = $٥,٣٣ \times ٢ = ١٠,٧$ جنيه .
- تكلفة الخدمة = $١٠ \times ٨ \times ٠,٥ = ٤٠$ جنيه .
- التكلفة الكلية = $٤٠ + ١٠,٧ = ٥٠,٧$ جنيه .

⊗ البديل الرابع :

وقت إنتظار الوحدة في اليوم = ص =

$$ص = \frac{1}{ب - أ} = \frac{1}{٢ - ٦} = \frac{1}{٤} \text{ ساعة في المتوسط}$$

إجمالي وقت الإنتظار لجميع الوحدات = أ × عدد الساعات × ص

$$= ٤ \times ٨ \times ٠,٢٥ = ٨ \text{ ساعات .}$$

- ⊗ تكلفة الإنتظار = $٨ \times ٢ = ١٦$ جنيه .
- ⊗ تكلفة الخدمة = $١٢ \times ٨ \times ٠,٥ = ٤٨$ جنيه .
- ⊗ التكلفة الكلية = $٤٨ + ١٦ = ٦٤$ جنيه .

وعلى ذلك يكون :

البديل	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
التكلفة الكلية	٥٦	٤٨	٥٠,٧	٥٦

ويتضح من ذلك أن : أقل البدائل تكلفه ، هو البديل الثاني ، ومن ثم يكون

العدد الأمثل للعامل بالمخزن هو (٨) عمال .

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

مثال (٥)

إحسب كل من :

- ١- عدد المنتظرين في إنتظار الحصول على الخدمة ؟
 - ٢- عدد المنتظرين في إنتظار الحصول على الخدمة شاملاً الوحدة التي تخدم
 - ٣- متوسط وقت الإنتظار للوحده طالبة الخدمة شاملاً وقت الخدمة ؟
 - ٤- متوسط وقت الإنتظار للوحده طالبة الخدمة بدون خدمه ؟
- وذلك في الحالتين الآتيتين : -

الحاله الأولى :

تصل البواخر بميناء بورسعيد بمعدل (٩) بواخر في الأسبوع في المتوسط ،
بينما يستطيع الميناء أن يستقبل البواخر بمعدل (١٢) باخره في الأسبوع في
المتوسط .

الحاله الثانيه :

متوسط عدد الذين يستخدمون التليفون في الساعه (١٢) شخص ، بينما
متوسط طول المكالمه التليفونيه (٣) دقائق .

الحل :

للحصول على المطلوبات السابقه لابد من تحديد (أ ، ب) لكل حاله من
الحالتين السابقتين ، مع العلم بأن :

أ = معدل الوصول للوحدات طالبة الخدمة .

ب = معدل الخدمة للوحدات طالبة الخدمة .

** الحاله الأولى :

أ = ٩ في الأسبوع ب = ١٢ في الأسبوع

- ١- عدد المنتظرين في إنتظار الحصول على الخدمة في الصف = س_ر
- $$س_و = \frac{٢١}{ب (أ - ب)} = \frac{٢٩}{(٩ - ١٢) ١٢} = \frac{٨١}{٣٦} = ٢,٥٢ \text{ وحدة}$$
- ٢- عدد المنتظرين في إنتظار الحصول على الخدمة شاملاً الوحدة التي تخدم
- $$س = س_و = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{٩}{٩ - ١٢} = ٣ \text{ وحدات في الأسبوع}$$
- ٣- متوسط وقت الإنتظار للوحدة طالبة الخدمة شاملاً وقت الخدمة = ص
- $$ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{٩ - ١٢} = \frac{١}{٣} \text{ أسبوع في المتوسط}$$
- ٤- متوسط وقت الإنتظار للوحدة طالبة الخدمة بدون خدمه = ص_ر
- $$ص_و = \frac{أ}{ب (أ - ب)} = \frac{٩}{(٩ - ١٢) ١٢} = \frac{١}{٤} \text{ أسبوع}$$
- وعلى الطالب محاولة إيجاد المطالب السابقه في ضوء الحاله الثانيه .

مثال (٦)

في أحد المصانع يوجد مخزن لتعدد يخدم العمال ، ويصل هؤلاء العمال إلى المخزن بطريقه عشوائيه بمعدل (١٨) عامل في الساعه في المتوسط ، وتؤدي الخدمة بواسطه موظف واحد في المخزن بمعدل (٢٠) عامل في الساعه في المتوسط ، ويتقاضى العامل (٥ جنيه) في الساعه ، كما يتقاضى موظف المخزن (٥ جنيه) في الساعه .

المطلوب :

ما هو العدد الأمثل من الموظفين الذين يجب أن يعملوا في المخزن إذا كان عدد ساعات العمل (٨ ساعات) يومياً ؟ .

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

الحل :

نقوم بتقييم الوضع الحالي (وجود موظف واحد بالمخزن) ، ثم نقوم بتقييم حالة وجود إثنين من الموظفين في المخزن ، وبالمقارنة نحدد البديل الأفضل وهو الأقل تكلفه ، وذلك باستخدام أسلوب صفوف الإنتظار على النحو التالي :

التكلفة الكلية = تكلفة الخدمة + تكلفة الإنتظار

- تكلفة الخدمة = عدد الموظفين \times أجر الموظف في اليوم
- تكلفة الإنتظار = أ \times عدد ساعات العمل \times ص \times أجر العامل في الساعه

أولاً : حالة وجود موظف واحد بالمخزن :

$$\text{أ} = ١٨ ، \quad \text{ب} = ٢٠$$

$$\text{تلكفة الخدمة} = ٨ \times ٥ \times ١ = ٤٠ \text{ جنيه يومياً .}$$

$$\text{تلكفة الإنتظار} = ٨ \times ١٨ \times \frac{١}{١٨ - ٢٠} = ٥$$

$$= ١٤٤ \times ٠,٥ \times ٥ = ٣٦٠ \text{ جنيه}$$

$$\text{التلكفة الكلية} = ٣٦٠ + ٤٠ = \underline{\underline{٤٠٠ \text{ جنيه}}}$$

ثانياً : حالة تعيين إثنين من الموظفين بالمخزن :

$$\text{أ} = ١٨ ، \quad \text{ب} = ٤٠$$

$$\text{تلكفة الخدمة} = ٨ \times ٥ \times ٢ = ٨٠ \text{ جنيه يومياً .}$$

$$\text{تلكفة الإنتظار} = ٨ \times ١٨ \times \frac{١}{١٨ - ٤٠} = ٥$$

$$= ١٤٤ \times \frac{١}{٢٢} \times ٥ = ٣٢,٥ \text{ جنيه}$$

$$\text{التلكفة الكلية} = ٣٢,٥ + ٨٠ = \underline{\underline{١١٢,٥ \text{ جنيه}}}$$

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

ثالثاً : حالة تعيين ثلاثة من الموظفين بالمخزن :

$$١٨ = أ ، \quad ٦٠ = ب ،$$

$$\text{تكلفة الخدمة} = ٣ \times ٥ \times ٨ = ١٢٠ \text{ جنيه يومياً} .$$

$$\text{تكلفة الإنتظار} = ١٨ \times ٨ \times \frac{١}{١٨ - ٦٠} \times ٥ =$$

$$= ١٤٤ \times \frac{١}{٤٢} \times ٥ = ١٧,٥ \text{ جنيه}$$

$$\text{التكلفة الكلية} = ١٢٠ + ١٧,٥ = ١٣٧,٥ \text{ جنيه} .$$

ومن هذه البدائل نجد أن أفضلها هو البديل الثانى حيث يحقق أقل تكلفه وهى

١١٢,٥ جنيه

مثال (٧)

فى إحدى محطات البنزين كان متوسط عدد السيارات الوارده إلى المحطه لشراء البنزين يبلغ (١٤) سياره فى الساعه ، وكل سياره تقضى (٢) دقيقه فى الخدمة .

والمطلوب حساب ما يلى :

١- متوسط عدد السيارات بالمحطه بما فى ذلك السياره محل الخدمة

٢- متوسط فترة الإنتظار للسياره ؟

٣- متوسط عدد السيارات فى المحطه شاملاً السياره التى تُخدم ؟

٤- متوسط فترة الإنتظار للسياره حتى تخرج من المحطه ؟ .

الحسن :

$$أ = ١٨ \text{ سياره / ساعه} , \quad ب = ٣٠ \text{ سياره / ساعه}$$

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

(١) متوسط عدد السيارات بالمحطة بما في ذلك السيارة محل الخدمة = س :

$$س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{١٨}{١٨ - ٣٠} = ١,٥ \text{ سيارة}$$

(٢) متوسط فترة الإنتظار للسيارة في الصف ص و :

$$ص و = \frac{أ}{ب(ب - أ)} = \frac{١٨}{٣٦٠(١٨ - ٣٠)} = ٠,٠٥ \text{ ساعة}$$

(٣) متوسط عدد السيارات في المحطة شاملاً السيارة التي تُخدم :

$$س و = \frac{أ}{ب(ب - أ)} = \frac{٢١٨}{٣٦٠(١٨ - ٣٠)} = ٠,٩ \text{ سيارة}$$

(٤) متوسط فترة الإنتظار للسيارة حتى تخرج من المحطة = ص :

$$ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{١٨ - ٣٠} = \frac{١}{١٢} \text{ ساعة في المتوسط}$$

مثال (٨)

تستطيع شركة الكهرباء أن تستقبل شكاوى إنقطاع التيار الكهربى عن

العلاء بمعدل (٢) شكوى فى الساعة ، وتملك الشركة سيارة إصلاح

تستطيع خدمة (٣) طلبات فى الساعة ، والمطلوب إيجاد كل من :

س ، س و ، ص ، ص و

الحل :

$$أ = ٢ \text{ ساعة} ، ب = ٣ \text{ ساعة}$$

$$(١) س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{٢}{٣ - ٢} = ٢ \text{ عميل}$$

أي أنه يوجد فى المتوسط ٢ عميل فى النظام .

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

$$(٢) \quad \text{س و} = \frac{أ}{ب(أ-ب)} = \frac{٢}{(٢-٣)٣} = \frac{٢}{١٠} = ٠,٢ \text{ عميل}$$

بمعنى أنه يوجد ٠,٢ عميل ينتظر في الصف للحصول على الخدمة .

$$(٣) \quad \text{ص} = \frac{١}{ب-أ} = \frac{١}{٢-٣} = -١ \text{ ساعة}$$

أي أن كل عميل يقضى ، فى المتوسط ساعة فى النظام .

$$(٤) \quad \text{ص و} = \frac{أ}{ب(أ-ب)} = \frac{٢}{(٢-٣)٣} = \frac{٢}{١٠} = ٠,٢ \text{ ساعة} = ١٢ \text{ دقيقة}$$

بمعنى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ، ١٢ دقيقة فى صف الإنتظار
مثال (٩)

وجد صاحب متجر أن العملاء يستعملون التليفون بالمحل كل (٥)

دقائق ، وأن طول المكالمه التليفونيه (٤) دقائق .

والمطلوب حساب كل من : س ، س و ، ص ، ص و

الحل :

$$أ = \frac{٦٠}{٥} = ١٢ \text{ وحده / ساعة} , \quad ب = \frac{٦٠}{٤} = ١٥ \text{ وحده / ساعة}$$

$$(١) \quad \text{س} = \frac{أ}{ب(أ-ب)} = \frac{١٢}{١٢-١٥} = \frac{١٢}{-٣} = -٤ \text{ وحدات}$$

$$(٢) \quad \text{س و} = \frac{أ}{ب(أ-ب)} = \frac{١٢}{(١٢-١٥)١٥} = \frac{١٢}{-٤٥} = -٠,٢٦٦ \text{ وحدة}$$

$$(٣) \quad \text{ص} = \frac{١}{ب-أ} = \frac{١}{١٢-١٥} = \frac{١}{-٣} = -٠,٣٣ \text{ ساعة فى المتوسط}$$

$$(٤) \quad \text{ص و} = \frac{أ}{ب(أ-ب)} = \frac{١٢}{(١٢-١٥)١٥} = \frac{١٢}{-٤٥} = -٠,٢٦٦ \text{ ساعة}$$

مثال (١٠)

يقوم مصنع للألبان بتوزيع منتجاته باستخدام سيارات نقل محمله طبقاً للحمولة الكامله . ولدى اشركه سيارات نقل خاصه بها بالإضافة إلى سيارات نقل أخرى ، وهناك شكوى من هذه الشركه الخاصه تتعلق بأن سياراتها يجب أن تنتظر في صفوف ، وبالتالي تفقد الشركه أموالها التي تدفعها عن السياره وعن السائق الذى ينتظر فقط ، وقد إقترحت هذه الشركه الخاصه على إدارة مصنع الألبان الإقتراحين التاليين :

- إما النقل فى خط سير ثانى بحموله نقل ثانيه .
- أو تخفيض الأسعار حسب وقت الإنتظار .

وقد توافرت البيانات التاليه :

- متوسط معدل الوصول (لكل سيارات النقل) = ٣ / ساعه .
 - متوسط معدل الخدمه = ٤ / ساعه .
 - توفر شركه النقل الخاصه ٤٠٪ من إجمالى عدد سيارات النقل .
- وبفرض أن هذه المعدلات عشوائيه طبقاً لتوزيع بواسون ، والمطلوب تحديد ما يلى:

- ١- احتمال إنتظار سيارات النقل ؟ .
- ٢- وقت الإنتظار لسيارات النقل المنتظره ؟ .
- ٣- وقت الإنتظار المتوقع لسيارات نقل الشركه الخاصه فى اليوم ؟ .

الحل :

- متوسط معدل الوصول (أ) = ٣
- متوسط وقت الوصول = $\frac{60}{3} = ٢٠$ دقيقه
- معدل أداء الخدمه (ب) = ٤

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

$$- \text{متوسط وقت أداء الخدمة} = \frac{60}{4} = 15 \text{ دقيقة}$$

$$1- \text{إحتمال إنتظار سيارات النقل من أجل الخدمة} = \frac{أ}{ب} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$2- \text{متوسط وقت الإنتظار لسيارات النقل المنتظرة} =$$

$$ص = \frac{أ}{ب(أ-ب)} = \frac{3}{4(3-4)} = \frac{3}{4} \text{ ساعة}$$

$$3- \text{إجمالي وقت الإنتظار المتوقع لسيارات نقل الشركة الخاصة في اليوم}$$

$$= \text{عدد السيارات في اليوم} \times \text{النسبة المئوية لسيارات نقل الشركة}$$

$$\times \text{متوسط وقت الإنتظار لكل سياره في صف الإنتظار}$$

$$= 8 \times 8 \times \text{النسبة المئوية} \times ص$$

$$= \frac{3}{4} \times 0,40 \times 8 \times 3$$

$$= 24 \times 0,40 \times 0,75 = 7,2 \text{ ساعة}$$

مثال (١١)

إفتتح بنك القاهرة فرع جديد في مدينة ٦ أكتوبر ، وبناءً على البحوث التمهيدية التي قام بها البنك ، توصل إلى أن معدل وصول العملاء يمكن أن يقترب من توزيع بواسون ، وذلك بمتوسط معدل وصول = ١٠ عملاء / ساعة ، وقد خطط البنك لإستخدام خزينه واحده ٠ وقد قدر أن هذه الخزينه يمكن أن تخدم في المتوسط ١٢ عميل / ساعة ، وبفرض أن توزيع معدل الخدمة يتبع أيضاً توزيع بواسون (أي أن توزيع وقت الخدمة يُعتبر توزيع أسى) .

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

المطلوب :

- ١- تحديد متوسط عدد طابى الخدمة (العملاء) فى النظام ؟ .
- ٢- تحديد متوسط الوقت الذى يقضيه العميل فى النظام ؟ .
- ٣- تحديد متوسط عدد طابى الخدمة فى الصف ؟ .
- ٤- تحديد متوسط وقت الإنتظار فى الصف ؟ .
- ٥- إحتمال أن تكون الخزينه مشغوله ، (معامل الإستخدام فى النظام) ؟ .
- ٦- إحتمال عدم وجود عملاء بالنظام ؟ .
- ٧- إحتمال وجود ٣ عملاء بالنظام ؟ .
- ٨- إحتمال أن يكون عدد العملاء فى الصف أكبر من ٤ عملاء ؟ .

الحل :

▪ متوسط معدل الوصول (أ) = ١٠ عملاء / ساعه

▪ متوسط وقت الوصول = $\frac{٦٠}{١٠}$ = ٦ دقائق

▪ معدل أداء الخدمة (ب) = ١٢ عميل

▪ متوسط وقت أداء الخدمة = $\frac{٦٠}{١٢}$ = ٥ دقائق

وبناءً على ذلك :

١- متوسط عدد طابى الخدمة (العملاء) فى النظام = س :

$$س = \frac{أ}{أ - ب} = \frac{١٠}{١٠ - ١٢} = ٥ \text{ عملاء}$$

أي أنه يوجد فى المتوسط ٥ عملاء فى النظام .

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

٢- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام = ص :

$$ص = \frac{1}{ب - أ} = \frac{1}{١٠ - ١٢} = ٠,٥ \text{ ساعة}$$

٣- متوسط عدد طابىي الخدمة في الصف = س و

$$س و = \frac{٢١٠}{(١٠ - ١٢) ١٢} = \frac{٢١}{ب (ب - أ)} = ٤,١٧ \text{ عميل}$$

٤- متوسط وقت الإنتظار في الصف = ص و

$$ص و = \frac{١٠}{ب (ب - أ)} = \frac{١٠}{(١٠ - ١٢) ١٢} = \frac{١٠}{٢٤} = ٠,٤١٦٧ \text{ ساعة} = ٢٥ \text{ دقيقة}$$

٥- إحتمال أن تكون الخزينة مشغولة ، (معامل الإستخدام في النظام) =

$$خ = \frac{١٠}{١٢} = \frac{١}{ب} = ٠,٨٣٣$$

$$(٦) ل ص و = ١ - \frac{١}{ب} = ١ - \frac{١}{١٢} = ٠,٩١٦٧$$

(٧) إحتمال وجود ٣ عملاء في النظام =

$$\left(\frac{١٠}{١٢} \right) \times \left(\frac{١٠}{١٢} - ١ \right) = ٣ ل$$

$$٠,٠٩٦٤٥١ = \frac{٢٠٠٠}{٢٠٧٣٦} = \frac{١٠٠٠}{١٧٢٨} \times \frac{٢}{١٢} =$$

(٨) إحتمال أن يكون عدد العملاء في الصف أكبر من ٤ عملاء =

$$١ - \left(\frac{١٠}{١٢} \right) = ١ - ٠,٨٣٣ = ٠,١٦٧ = ١ - ٠,٨٣٣$$

$$٠,٤٠١٨٧٨ = \frac{١٠٠٠٠٠}{٢٤٨٨٣٢} =$$

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

تمارين على نظرية صفوف الإنتظار

(١) آلة لتصوير الوثائق يصل إليها العميل بمعدل ١٥ عميل في الساعة ، وتقدم الخدمة لهم بواقع ٣ دقائق للعميل الواحد ، فإذا كان معدل الوصول يتبع التوزيع البواسوني ، ومعدل الخدمة يتبع التوزيع الأسّي ، وأسلوب الخدمة هو من يأتي أولاً يُخدم أولاً .

والمطلوب إيجاد :

١- معدل استخدام النظام (كثافة التشغيل) - احتمال انتظار عميل واحد في صف الإنتظار ؟ .

٢- احتمال عدم وجود عميل بالنظام ؟ .

٣- احتمال وجود ٣ عملاء بالنظام ؟ .

٤- احتمال وجود أكثر من ٣ عملاء بالنظام ؟ .

٥- متوسط عدد العملاء في النظام ؟ .

٦- متوسط عدد العملاء في صف الإنتظار ؟ .

٧- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام ؟ .

٨- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الصف ؟ .

ويعمل على الآلة عامل واحد يتقاضى ٣ جنيهات في الساعة ، وعدد ساعات العمل اليومية ١٢ ساعة ، وساعة الإنتظار تكلف المنشأة ٤ جنيهات ، والمطلوب إيجاد التكلفة الكلية ؟

(٢) مضرب أرز يصل إليه العميل بمعدل ٢٠ عميل في الساعة ، وتقدم لهم الخدمة بواقع ٢٥ عميل في الساعة ، فإذا كانت تكلفة الإنتظار في الدقيقة الواحدة ٤٠ جنيه (على مدار الموسم) ، وأن تكلفة تعيين موظف جديد هي ١٧٥ جنيه خلال الموسم ، إلا أن معدل الخدمة سيرتفع إلى ٣٠ عميل في الساعة ، فهل توافق على قرار الإدارة بتعيين موظف جديد ؟

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

(٣) تصل البواخر تصل إلى ميناء السويس بمعدل (١٢) باخرة في اليوم في المتوسط ، وتجرى عملية الخدمة (تحميل وتنزيل) بمعدل (١٨) باخرة في اليوم ، أجب عن الآتي :

- ١- ما احتمال أن تصل إلى الميناء باخرة جديدة وتقف في خط الإنتظار ؟
- ٢- ما احتمال أن لا يكون أي باخرة في النظام ؟
- ٣- ما متوسط عدد البواخر في خط الإنتظار ؟
- ٤- ما متوسط الوقت الذي تمضيه الباخرة في خط الإنتظار من أجل عملية التحميل أو التفريغ ؟
- ٥- ما احتمال أن يكون في النظام ٣ بواخر ؟
- ٦- إذا كانت تكلفة الإنتظار في دقيقة الواحدة هي ٢٥ جنيه ، واقترحت هيئة إدارة الميناء دعم طاقة مركز الخدمة ليصبح معدل الخدمة في اليوم ٢٠ باخرة وبتكلفة قدرها ٢٠٠٠ جنيه ، فهل توافق على هذا الاقتراح ؟

(٤) في إحدى محطات خدمة السيارات على الطرق السريعة كان معدل وصول السيارات هو (٤٠) سيارة في الساعة ، بينما كان معدل تزويد السيارات بالوقود هو (١,٢٥) دقيقة في المتوسط ، إ حسب كل من :

- (١) متوسط عدد السيارات في النظام ؟
- (٢) متوسط عدد السيارات في الصف ؟
- (٣) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام ؟
- (٤) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الصف ؟
- (٥) احتمال أن تكون المحطة في حالة تشغيل ؟
- (٦) احتمال أن تكون المحطة عاطلة ؟
- (٧) احتمال أن يزيد عدد السيارات في المحطة عن (٤) ؟

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

(٥) شركة الحديد والتصلب لديها وحدة لعلاج العاملين بها ، وقد توصلت الشركة من واقع خبرتها أن وصول العاملين للعلاج يتبع توزيع بواسون ، ويبلغ متوسط وصول العمال للحصول على الخدمة العلاجية ٥ عمال / ساعة ، في حين يبلغ متوسط معدل أداء الخدمة العلاجية ٦ عمال / ساعة ، المطلوب :

١- تحديد متوسط عدد طالبي الخدمة (العمال المترددين على الوحدة

العلاجية) في النظام ؟ .

٢- تحديد متوسط الوقت الذي يقضيه طالب الخدمة في النظام ؟ .

٣- تحديد متوسط عدد طالبي الخدمة في الصف ؟ .

٤- تحديد متوسط وقت الإنتظار في الصف ؟ .

٥- احتمال عدم وجود طالبي خدمة بالنظام ؟ .

٦- احتمال وجود ٣ عمال بالنظام ؟ .

(٦) إذا كان عدد العاملين بقسم التجميع في إحدى الشركات هو ٥ عمال ، وأن احتمال غياب عامل واحد منهم يومياً هو ٢٠ % ، وبفرض أن حجم الإنتاج يتطلب وجود ٥ عمال بقسم التجميع ، فإذا علمت أن معدل الإنتاج هو ٢٠ وحدة في الساعة ، وكذلك معدل التجميع هو ٢٠ وحدة في الساعة ، وقد قدم لمدير الإنتاج إقتراح بتعيين عامل جديد . المطلوب : تحديد أفضل عدد للعمال علماً بأن أجر العامل في اليوم (٣,٢) جنيه ، وأن كل وحدة غير منتجة تضيع على المشروع ربحاً قدره (٢) جنيه ، وأن عدد ساعات العمل في اليوم (٨) ساعات .

(٧) يوجد في أحد المصانع الكبرى قسم لإصلاح وصيانة الآلات والماكينات

التي تُستخدم في أقسامه الإنتاجية ، وترغب إدارة المصنع في دراسة

اقتصادية العمل في هذا القسم ، وقد توافر لديها البيانات التالية :

▪ تصل الآلات من الأقسام الإنتاجية بمعدل ٣ آلات في الساعة .

بحوث العمليات

(٧) نظرية صفوف الإنتظار

- معدل خدمة الأقسام الإنتاجية هو ٤ آلات في الساعة ، أي أن متوسط الوقت اللازم لإتمام خدمة الصيانة نلآله هو ١٥ دقيقة .
 - يعمل بقسم الصيانة عامل واحد ، ويبلغ مرتبه في الساعة (٠,٢٠) جنيه ، وكان متوسط أجر العامل في الإنتاج هو (٠,٦٠) جنيه في الساعة .
- والمطلوب حساب :

- (١) متوسط عدد الآلات في صف الإنتظار ؟.
 - (٢) متوسط عدد الآلات في قسم الصيانة ؟.
 - (٣) متوسط الوقت الذي تنتظره الآله بدون خدمه ؟.
 - (٤) متوسط الوقت الذي تقضيه الآله بقسم الصيانة ؟.
 - (٥) مجموع التكاليف الكلية المتوقعة بعملية الصيانة في اليوم ؟.
- (٨) شركة كهرباء تستقبل شكاوى إنقطاع التيار الكهربائي من العملاء بمعدل ٢ شكاوى في الساعة ، وتمتلك الشركة سيارة إصلاح مزودة بجهاز راديو يستطيع خدمة ٣ طلبات في الساعة في المتوسط ، والمطلوب حساب :
- ١- متوسط الوقت الذي يُعاد فيه التيار شاملاً وقت الإصلاح ؟.
 - ٢- متوسط الوقت الذي ينتظره العميل بدون إصلاح ؟.
 - ٣- متوسط عدد المكالمات التي تنتظر الخدمة ؟.
 - ٤- متوسط عدد المكالمات التي تنتظر الخدمة شاملةً المكالمات تحت الخدمة ؟.
- (٩) تصل عربات النقل المحملة إلى المخزن لتفريغها بمعدل (١٠) عربات في الساعة ، ويستطيع عمال التفريغ القيام بتفريغ (١٢) عربيه في الساعة والمطلوب حساب :
- ١- متوسط عدد العربات في صف الإنتظار ؟.
 - ٢- متوسط عدد العربات في النظام ؟.
 - ٣- متوسط الوقت الذي تنتظره العربيه بدون تفريغ ؟.
 - ٤- متوسط الوقت الذي تنتظره العربيه حتى تعود مره أخرى ليتم تحميلها ؟.

الفصل الثامن

تحليل سلاسل ماركوف

Markov Chains Analysis

يعتبر أسلوب سلاسل ماركوف Markov Chains من الأساليب الإحصائية التي تخدم وتناسب متخذ القرار الذي يواجه مواقف وبدائل مختلفة ، ويكون عليه الاختيار من بينها بما يعظم دالة منفعة . هذا ويسعى أسلوب ماركوف إلى دراسة وتحليل التحركات أو التغيرات الحالية لمتغير معين كمحاولة للتنبؤ بتحركاته وتغيراته المتوقعة أو المستقبلية ويعتمد أسلوب سلاسل ماركوف على أساس أن سلوك أى متغير فى المستقبل يتحدد فى ضوء سلوكه فى الفترة أو فى الفترات السابقة مباشرة ، أى بمعرفة ودراسة سلوك متغير ما فى الفترة الحالية فإنه يمكن التنبؤ بسلوك المتغير فى الفترة القادمة ويرجع هذا الأسلوب إلى عالم الرياضيات الروسى ماركوف فى أوائل القرن العشرين ، وقد استخدم ماركوف هذا الأسلوب فى وصف حركة جزيئات غاز فى إناء مغلق ثم التنبؤ بهذه الحركة فى المستقبل . ثم إنتقل إستخدام الأسلوب فى مجال بحوث التسويق بهدف التنبؤ بسلوك العملاء ومعرفة درجة ولائهم لمنتج معين أو ماركة معينة فى الأجل القصير أو الأجل الطويل . وعلى ضوء معرفة المنشأ لحصتها المتوقعة فى السوق فى الفترة أو (الفترات) القادمة ، فإنه يمكنها رسم سياستها التسويقية المناسبة لظروفها . وإذا كان تطبيق أسلوب ماركوف فى المجالات الإدارية قد إرتبط فى البدايه بمجال رسم السياسات التسويقية ، فقد ظهرت فى السنوات الأخيرة تطبيقات متعددة لأسلوب سلاسل ماركوف فى المجالات المحاسبية والإدارية منها على سبيل المثال ما يلى :

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

- (١) دراسة فعالية برامج الحملات الإعلانية ، حيث يُستخدم أسلوب سلاسل ماركوف في تقويم آثار البرامج الإعلانية والنتائج المتوقعة لكل برنامج .
 - (٢) التنبؤ بالإحتياجات من القوى العاملة في ضوء معرفة أعداد من يتركون الخدمة بسبب الإستقاله أو الإحالة للمعاش أو بسبب الوفاة .
 - (٣) دراسة جداول تقادم أرصدة حسابات العملاء في نهاية عدة فترات زمنية ومدى تحول العملاء من درجة إنتمائيه معينه إلى درجة أخرى ، ومحاولة تقدير مخصص الديون المشكوك فيها .
 - (٤) التنبؤ بنصيب وسائل النقل المختلفه في نقل سلعه معينه لفترة قادمة ، وذلك في ضوء التعرف على النقلات التي تقوم بها كل وسيله ، والنقلات التي تحول إليها من وسائل النقل الأخرى .
- وعلى ذلك ، فإنه يمكن القول بإمكانية الإستفاده من أسلوب ماركوف في مجالات متعددة ، ولبيان كيفية الإستفاده من هذا الأسلوب سنتناول تطبيق أسلوب ماركوف في أحد المجالات الإداريه وهي مجال التسويق ورسم السياسات التسويقيه ، ولتوضيح التطبيق العملي لأسلوب ماركوف نفترض المثال التالي :

مثال

بفرض وجود ثلاث شركات تنتج منتجاً واحداً ، ولكن يتم تسويقه تحت مسميات وعلامات تجاريه مختلفه (س ، ص ، ع) ، ومن المعروف أن كل شركه لا يثبت عدد عملائها ، فاعلاء ينتقلون من شركه لأخرى مع مرمر الوقت لأسباب كثيره منها الإعلانات وعدم الرضا عن الخدمه المقدمه لهم ، وإختلاف سياسات البيع والتحصيل ، الخ .

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

وبفرض أن هذه الشركات الثلاث تحتفظ بمعلومات تتعلق بعدد عملائها ، والشركة التي كان يتعامل معها كل عميل جديد ، وبفرض أن عدد العملاء في السوق ثابت ، أي لم يستجد عملاء خلال الفترة محل الدراسة ، ولم يترك السوق عملاء قدامى .

وبفرض أن هذه الشركات الثلاث تمسك سجلات منتظمة ، وأمكن توفير البيانات التحليلية الخاصة بتحركات العملاء بين الشركات الثلاث خلال شهر ، وكانت هذه البيانات عن شهر :

والجدول التالي يلخص التعاملات .

عدد العملاء في أول فبراير ٢٠٠١	تحركات العملاء						عدد العملاء في أول يناير ٢٠٠١	الشركة
	الخسارة			المكسب				
	إلى ع	إلى ص	إلى س	من ع	من ص	من س		
٢٢٠	٢٠	٢٠	صفر	٢٥	٣٥	صفر	٢٠٠	س
٤٩٠	١٥	صفر	٣٥	٢٠	صفر	٢٠	٥٠٠	ص
٢٩٠	صفر	٢٠	٢٥	صفر	١٥	٢٠	٣٠٠	ع
١٠٠٠	٣٥	٤٠	٦٠	٤٥	٥٠	٤٠	١٠٠٠	المجموع

وعلى ضوء بيانات الجدول السابق ، يمكن حساب احتمالات إحتفاظ كل شركة بعملائها ، إحتتمالات فقدانها لجزء من عملائها للشركات الأخرى ، وذلك بقسمة عدد العملاء الذين تحتفظ بهم الشركة وعدد العملاء الذين ستخسرهم على العدد الإجمالي لعملائها الأصليين (الذين كانوا لديها في بداية الفترة) وذلك من خلال الجدول التالي :

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

الشركة الإحتمال	س	ص	ع
الإحتفاظ	$0,8 = \frac{40-200}{200}$	$0,9 = \frac{50-500}{500}$	$0,85 = \frac{45-300}{300}$
فقد العملاء للشركة (س)	صفر	$0,07 = \frac{35}{500}$	$0,83 = \frac{25}{300}$
فقد العملاء للشركة (ص)	$0,1 = \frac{20}{200}$	صفر	$0,067 = \frac{20}{300}$
فقد العملاء للشركة (ع)	$0,1 = \frac{20}{200}$	$0,03 = \frac{15}{500}$	صفر
مجموع الإحتمالات	١,٠٠	١,٠٠	١,٠٠

وعلى ذلك ، تكون مصفوفة التحركات الإحتمالية (مصفوفة إحتمالات الإنتقال)
على النحو التالي :

مكسب خسارة	س	ص	ع
س	٠,٨	٠,٠٧	٠,٠٨٣
ص	٠,١	٠,٩	٠,٠٦٧
ع	٠,١	٠,٠٣	٠,٨٥٠

حيث أن الصف يمثل الإحتفاظ والمكسب ، والعمود يمثل الإحتفاظ والخسارة ، فالعمود الأول يبين أن الشركة (س) تحتفظ بـ ٨٠٪ من عملائها وأنها تخسر ١٠٪ من عملائها للشركة (ص) وتخسر أيضاً ١٠٪ للشركة (ع) ، والصف الأول يبين أن الشركة (س) ستحتفظ بـ ٨٠٪ من

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

عملاتها ، وتكسب ٧٪ من عملاء الشركة (ص) ، وتكسب أيضاً ٨,٣٪ من عملاء الشركة (ع) ، وهكذا .

وبنظره فاحصه لمصفوفة التحركات الإحتمالية يمكن ملاحظة الآتي :

• أنها مصفوفة مربعة (عدد الاصفوف = عدد الأعمدة)

• جميع عناصرها موجبه .

• قطرها يمثل احتمالات الإحتفاظ بالعملاء .

• مجموع عناصر كل عمود تساوى الواحد الصحيح ، حيث أن كل عمود يمثل احتمالات تحركات عملاء كل شركة .

التنبؤ بحصص السوق المتوقعه لفترات قادمة :-

على ضوء مصفوفة التحركات الإحتمالية ، وبمعرفة الحصص الحالية للشركات يمكن التنبؤ بالحصص المتوقعه لكل شركة فى الفتره القادمه (أي شهر) وفقاً للعلاقه التاليه :

$$\begin{array}{ccc} \text{حصص السوق} & \text{مصفوفة التحركات} & \text{حصص الشركات} \\ \text{فى الفتره} & = & \text{فى الفتره} \\ \text{القادمة} & \text{الإحتماليه خلال} & \text{الحاليه} \\ & \times & \end{array}$$

وبفرض أن التحركات الإحتماليه فى هذا المثال ستظل ثابتة ، وأن حصص الشركات فى أول ديسمبر ٢٠٠٠ وفقاً للبيانات السابقه كانت كما يلى :-

$$\text{حصه (س)} = \frac{٢٢٠}{١٠٠٠} = ٢٢ \%$$

$$\text{حصه (ص)} = \frac{٤٩٠}{١٠٠٠} = ٤٩ \%$$

$$\text{حصه (ع)} = \frac{٢٩٠}{١٠٠٠} = ٢٩ \%$$

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

∴ حصص الشركات في السوق خلال الشهر القادم (الفترة القادمة) ، أي في أول يناير ٢٠٠١ على النحو التالي :

$$\begin{pmatrix} ٠,٢٣٤ \\ ٠,٤٨٢ \\ ٠,٢٨٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٢ \\ ٠,٤٩ \\ ٠,٢٩ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٠٨٣ & ٠,٠٧ & ٠,٨ \\ ٠,٦٧ & ٠,٩ & ٠,١ \\ ٠,٨٥ & ٠,٠٣ & ٠,١ \end{pmatrix} = \text{الحصص المتوقعة}$$

حيث أنه من خلال ضرب المصفوفات السابق دراستها نجد أن :

$$\text{نصيب س} = (٠,٢٩ \times ٠,٠٨٣) + (٠,٤٩ \times ٠,٠٧) + (٠,٢٢ \times ٠,٨) = ٠,٢٣٤$$

$$\text{نصيب ص} = (٠,٢٩ \times ٠,٠٦٧) + (٠,٤٩ \times ٠,٩٠) + (٠,٢٢ \times ٠,١) = ٠,٤٨٢$$

$$\text{نصيب ع} = (٠,٢٩ \times ٠,٨٥٠) + (٠,٤٩ \times ٠,٠٣) + (٠,٢٢ \times ٠,١) = ٠,٢٨٤$$

وعلى ذلك ، فإن الحصص المتوقعة للشركات الثلاث خلال شهر يناير

٢٠٠١ م :

$$\begin{matrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ (٠,٢٣٤ & ٠,٤٨٢ & ٠,٢٨٤) \end{matrix}$$

وبمقارنة حصص الشركات الثلاث في شهر ديسمبر ٢٠٠٠ م بحصص الشركات في شهر يناير ٢٠٠١ م نلاحظ أن حصة الشركة (س) زادت من ٠,٢٢ إلى ٠,٢٣٤ وفي نفس الوقت انخفضت حصة الشركة (ص) وحصة الشركة (ع) ، ومجموع الإنخفاض في الشركات (ص ، ع) يساوى مجموع الزيادة في حصة الشركة (س) ولكن مازال مجموع حصص كل الشركات يعادل الواحد الصحيح .

** هذا ولحساب الحصص المتوقعة للشركات في أول فبراير ٢٠٠١ م ، فإننا

نضرب :

$$\begin{matrix} \text{مصفوفة} \\ \text{التحركات} \\ \text{الإحتمالية} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{حصص الشركات} \\ \text{في أول يناير} \\ \text{سنة ٢٠٠١} \end{matrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٤٥ \\ ٠,٤٧٦ \\ ٠,٢٧٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٣٤ \\ ٠,٤٨٢ \\ ٠,٢٨٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٠٨٣ & ٠,٠٧ & ٠,٨ \\ ٠,٦٧ & ٠,٩ & ٠,١ \\ ٠,٨٥ & ٠,٠٣ & ٠,١ \end{pmatrix} =$$

ولحساب الحصص المتوقعة للشركات في أول مارس ٢٠٠١ ، فإننا نضرب :

$$\begin{matrix} \text{مصفوفة} \\ \text{التحركات} \\ \text{الإحتمالية} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{حصص الشركات} \\ \text{في أول فبراير} \\ \text{سنة ٢٠٠١} \end{matrix} = \therefore \text{حصص الشركات في السوق في أول مارس ٢٠٠١} =$$

$$\begin{pmatrix} ٠,٢٤٥ \\ ٠,٤٧٦ \\ ٠,٢٧٩ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٠٨٣ & ٠,٠٧ & ٠,٨ \\ ٠,٦٧ & ٠,٩ & ٠,١ \\ ٠,٨٥ & ٠,٠٣ & ٠,١ \end{pmatrix} =$$

وهكذا

هذا وبدلاً من تكرار عمليات الضرب هذه حتى نصل إلى حصص شهر أبريل ، فإنه يمكن ضرب مصفوفة التحركات الإحتمالية خلال شهر يناير مرفوعة إلى أس ٣ (يناير-فبراير-مارس) ، في حصص شهر يناير، ولحساب حصص شهر مايو نضرب مصفوفة التحركات الإحتمالية لشهر يناير مرفوعة إلى أس ٤ في حصص شهر يناير ، وهكذا .

وباستخدام طاقات الحاسبات الإلكترونية يمكن الإستفادة من الطريقة الأخيرة هذه في حساب حصص السوق عن أي فترة مقبله بطريق مباشر دون تكرار لعمليات الضرب .

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

مثال (١)

في ٢٠٠٢/١/١م كانت سوق إحدى السلع محتكرة بثلاث شركات (أ، ب، ج) وكان عدد العملاء على الترتيب ٦٠٠٠، ٣٠٠٠، ١٠٠٠، وأثناء السنة كانت تحركات العملاء على النحو التالي :

- ١٢٠٠ من (أ) إلى (ب)
- ٦٠٠ من (أ) إلى (ج)
- ٢٤٠٠ ظلوا يتعاملون مع (ب)
- ٣٠٠ من (ب) إلى (أ)
- ٢٠٠ من (ج) إلى (أ)
- ٤٠٠ من (ج) إلى (ب)

والمطلوب تحديد نصيب كل شركة من الشركات الثلاث في ٢٠٠٣/١/١م ؟

الحل :

يمكن توضيح تحركات العملاء بين الشركات على النحو التالي :

عدد العملاء في ١/١ ٢٠٠٣	تحركات (تدفقات) العملاء						عدد العملاء في ١/١ ٢٠٠٢	الشركة
	خساره إلى			مكسب من				
	إلى ج	إلى ب	إلى أ	من ج	من ب	من أ		
٤٧٠٠	٦٠٠	١٢٠٠	—	٢٠٠	٣٠٠	—	٦٠٠٠	أ
٤٠٠٠	٣٠٠	—	٣٠٠	٤٠٠	—	١٢٠٠	٣٠٠٠	ب
١٣٠٠	—	٤٠٠	٢٠٠	—	٣٠٠	٦٠٠	١٠٠٠	ج
١٠٠٠٠							١٠٠٠٠	المجموع

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

بحوث العمليات

ومن هذا الجدول السابق يمكن إيجاد نصيب كل شركة من الشركات الثلاث على النحو التالي :

$$\text{حصة (أ)} = \frac{4700}{10000} = 0,47$$

$$\text{حصة (ب)} = \frac{4000}{10000} = 0,40$$

$$\text{حصة (ج)} = \frac{1300}{10000} = 0,13$$

أو يمكن ضرب حصص الشركاء في ١/١/٢٠٠٢ × مصفوفة التحركات الإحتمالية للوصول للحصص السابقة .

ولإيجاد مصفوفة التحركات الإحتمالية (إحتتمالات الإنتقال) نتبع الآتي :

إحتمالات الإحتفاظ والخسارة للعملاء :

الشركة الإحتمال	أ	ب	ج
الإحتفاظ	$\frac{1800-6000}{6000} = 0,7$	$\frac{2400}{3000} = 0,8$	$\frac{600-1000}{1000} = 0,4$
فقد العملاء لشركة (أ)	صفر	$0,1 = \frac{300}{3000}$	$0,2 = \frac{200}{1000}$
فقد العملاء لشركة (ب)	$0,2 = \frac{1200}{6000}$	صفر	$0,4 = \frac{400}{1000}$
فقد العملاء لشركة (ج)	$0,1 = \frac{600}{6000}$	$0,1 = \frac{300}{3000}$	صفر
مجموع الإحتمالات	١,٠٠	١,٠٠	١,٠٠

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

وعلى ذلك تكون مصفوفة التحركات الإحتمالية (مصفوفة احتمالات الإنتقال)
على النحو التالي :

			مكسب		خسارة
			ب	ج	
أ	٠,٢	٠,١	٠,٧		
	٠,٤	٠,٨	٠,٢		
	٠,٤	٠,١	٠,١		
ب	٠,٢	٠,١	٠,٧		
	٠,٤	٠,٨	٠,٢		
	٠,٤	٠,١	٠,١		
ج	٠,٢	٠,١	٠,٧		
	٠,٤	٠,٨	٠,٢		
	٠,٤	٠,١	٠,١		

وبفرض أن التحركات الإحتمالية في هذا المثال ستظل ثابتة : وأن

حصص الشركات في ٢٠٠٢/١/١ وفقاً للبيانات السابقة كما يلي : -

$$\text{حصّة (أ)} = \frac{6000}{10000} = 60\%$$

$$\text{حصّة (ب)} = \frac{3000}{10000} = 30\%$$

$$\text{حصّة (ج)} = \frac{1000}{10000} = 10\%$$

∴ حصص الشركات في السوق في ٢٠٠٣/١/١ =

$$\begin{matrix} \text{مصفوفة} \\ \text{التحركات} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{حصص الشركات} \\ \text{في أول يناير} \\ \text{سنة ١٩٩٩} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{مصفوفة} \\ \text{الإحتمالية} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0,47 \\ 0,40 \\ 0,13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,30 \\ 0,10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} =$$

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

وإذا أردنا التنبؤ بنصيب كل شركة في ١/١/٢٠٠٤ ، يكون :

الحصص المتوقعة للشركات في ١/١/٢٠٠٤ =

$$\begin{matrix} \text{مصفوفة} \\ \text{التحركات} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{حصص الشركات} \\ \text{في أول يناير} \\ \text{سنة ٢٠٠٣} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{الإحتمالية} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٠,٣٩٥ \\ ٠,٤٦٦ \\ ٠,١٣٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٤٧ \\ ٠,٤٠ \\ ٠,١٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,١ & ٠,٧ \\ ٠,٤ & ٠,٨ & ٠,٢ \\ ٠,٤ & ٠,١ & ٠,١ \end{pmatrix} =$$

مثال (٢)

في أول يناير من عام ٢٠٠٣م كان لكل مصنع من مصانع الألبان الثلاث (أ ، ب ، جـ) أنصبة في السوق (٢٥ % ، ٤٠ % ، ٣٥ %) على الترتيب وعلى مدار السنة إحتفظ المصنع (أ) بـ ٨٠ % من عملائه ، بينما خسر ١٢ % للمصنع (ب) ، وخسر ٨ % للمصنع (جـ) . أما المصنع (ب) فقد إحتفظ بـ ٩٠ % من عملائه ، بينما خسر ٥ % للمصنع (أ) ، وخسر ٥ % للمصنع (جـ) . أما المصنع (جـ) فقد إحتفظ بـ ٩٥ % من عملائه ، بينما خسر ٣ % للمصنع (أ) ، وخسر ٢ % للمصنع (جـ) . فإذا إستمر هذا السلوك الخاص بالعملاء خلال السنة القادمة حدد النسب المئوية لنصيب كل مصنع في السوق في أول يناير من عام ٢٠٠٣م

الحل :

حصص الشركات الحالية في السوق هي :

$$\begin{matrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ [0,25 & 0,40 & 0,35] \end{matrix}$$

ووفقا لإحتمالات المكسب والخسارة بين الشركات ، تكون مصفوفة

إحتمالات الإنتقال في العام الحالي كما يلي :

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

			مكسب	خسارة
	← ج ب أ			↓
	أ	ب	ج	
أ	٠,٠٣	٠,٠٥	٠,٠٨	
ب	٠,٠٢	٠,٩	٠,١٢	
ج	٠,٩٥	٠,٠٥	٠,٠٨	

∴ حصص الشركات الثلاث في أول يناير عام ٢٠٠٣ =

$$\begin{pmatrix} ٠,٢٣٠٥ \\ ٠,٣٩٧٠ \\ ٠,٣٧٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٥ \\ ٠,٤٠ \\ ٠,٣٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٠٣ & ٠,٠٥ & ٠,٠٨ \\ ٠,٠٢ & ٠,٩ & ٠,١٢ \\ ٠,٩٥ & ٠,٠٥ & ٠,٠٨ \end{pmatrix} =$$

أي أنه سيصبح نصيب المصنع (أ) ٢٣,٠٥ % ، نصيب المصنع (ب)

٣٩,٧ % ونصيب المصنع (جـ) ٣٧,٢٥ % من السوق في أول يناير ٢٠٠٣

مثال (٣)

في أول يونيو ٢٠٠٢م كان المخبز (أ) يحصل على ٤٠ % من السوق المحلية ، وكان مخبزي (ب ، جـ) كل منهما يحصل على ٣٠ % من السوق المحلية ، وبعد عمل بحث تسويقي لمدة شهرين وجد أن المخبز (أ) احتفظ بـ ٨٥ % من عملائه ، بينما يحصل على ٥ % من عملاء المخبز (ب) ، ١٠ % من عملاء المخبز (جـ) ، أما المخبز (ب) احتفظ بـ ٩٠ % من عملائه ، بينما يحصل على ٥ % من عملاء المخبز (أ) ، ٥ % من عملاء المخبز (جـ) ، أما المخبز (جـ) احتفظ بـ ٨٥ % من عملائه ، بينما يحصل على ١٠ % من عملاء المخبز (أ) ، ٥ % من عملاء المخبز (ب) . و المطلوب إيجاد حصص المخباز الثلاث من السوق في أول أغسطس من عام ٢٠٠٢م ؟

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

الحل :

مصفوفة التحركات الاحتمالية :

			مكسب	
			خسارة	
←	ب	ا		
ج				
(٠,١٠	٠,٠٥	٠,٨٥	ا
	٠,٠٥	٠,٩	٠,٠٥	ب
	٠,٨٥	٠,٠٥	٠,١٠	ج
)				

الحل :

حصص المخازن في السوق في أول أغسطس ٢٠٠٢ =

$$\begin{matrix} \text{مصفوفة} \\ \text{التحركات} \\ \text{الاحتمالية} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{حصص المخازن} \\ \text{في أول يونيو} \\ \text{٢٠٠٢} \end{matrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ٠,٣٨٥ \\ ٠,٣٠٥ \\ ٠,٣١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٤٠ \\ ٠,٣٠ \\ ٠,٣٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,١٠ & ٠,٠٥ & ٠,٨٥ \\ ٠,٠٥ & ٠,٩٠ & ٠,٠٥ \\ ٠,٨٥ & ٠,٠٥ & ٠,١٠ \end{pmatrix} =$$

⊗ نصيب المخبز (ا) = ٣٨,٥ % من السوق .

⊗ نصيب المخبز (ب) = ٣٠,٥ % من السوق .

⊗ نصيب المخبز (ج) = ٣١ % من السوق .

مثال (٤)

ثلاث من الشركات التجارية تقوم بتسويق أجهزة الراديو والتلفزيون في مدينة المنصورة ، وقامت هذه الشركات (س ، ص ، ع) بدراسة سوقها لمعرفة مدى قدرتها على المحافظة على عملائها ، وقد أعطت الشركات هذه البيانات عن الفترة من أول أكتوبر حتى أول ديسمبر ٢٠٠٢ م : وطلبت منك التنبؤ بسوقها أول فبراير ٢٠٠٣ م ؟

وكانت البيانات كما يلي :

عدد العملاء	تَحركات العملاء			عدد العملاء	اشتركه
	مكسب أضافته الشركات من				
في ١٢/١ ٢٠٠٢	ع	ص	س	١٠/١ ٢٠٠٢	
٨٤٠	٤٥	٣٥	—	٨٠٠	س
٥٨٥	٣٥	—	١٠	٦٠٠	ص
٤٧٥	—	٢٥	٣٠	٥٠٠	ع
١٩٠٠				١٩٠٠	المجموع

الحل :

أولاً : جدول تحركات (تدفقات العملاء) :

من هذا الجدول السابق يمكن إيجاد جدول تدفقات العملاء بين

الشركات الثلاث على النحو التالي :

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

عدد العملاء في	تحركات (تدفقات) العملاء						عدد العملاء في	الشركة
	مكسب من			خسارة إلى				
	س	ص	ع	س	ص	ع		
١٢/١ ٢٠٠٢							١٠/١ ٢٠٠٢	
٨٤٠	٣٠	١٠	—	٤٥	٣٥	—	٨٠٠	س
٥٨٥	٢٥	—	٣٥	٣٥	—	١٠	٦٠٠	ص
٤٧٥	—	٣٥	٤٥	—	٢٥	٣٠	٥٠٠	ع
١٩٠٠							١٩٠٠	المجموع

ثانياً : جدول الاحتمالات :

الشركة	س	ص	ع
الإحتمال			
الإحتفاظ	$\frac{٤٠-٨٠٠}{٨٠٠} = ٠,٩٥ =$	$\frac{٦٠-٦٠٠}{٦٠٠} = ٠,٩ =$	$\frac{٨٠-٥٠٠}{٥٠٠} = ٠,٨٤ =$
خسائر للشركة الأولى	$\frac{١٠}{٨٠٠} = ٠,٠١٢٥ =$	$\frac{٣٥}{٦٠٠} = ٠,٠٥٨٣ =$	$\frac{٤٥}{٥٠٠} = ٠,٠٩ =$
خسائر للشركة الثانية	$\frac{٣٠}{٨٠٠} = ٠,٠٣٧٥ =$	$\frac{٢٥}{٦٠٠} = ٠,٠٤١٧ =$	$\frac{٣٥}{٥٠٠} = ٠,٠٧ =$

ثالثاً : مصفوفة التحركات الاحتمالية

يتم ترتيب الاحتمالات السابقة في شكل مصفوفة التحركات الاحتمالية (مصفوفة احتمالات الإنتقال) على النحو التالي :

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

توث العمليات

			مكسب	
			مكسب	خسارة
ع	ص	س	س	ص
٠,٠٩	٠,٠٥٨٣	٠,٩٥٠٠	٠,٠٩	٠,٠٥٨٣
٠,٠٧	٠,٩٠٠٠	٠,٠١٢٥	٠,٠٧	٠,٩٠٠٠
٠,٨٤	٠,٠٤١٧	٠,٠٣٧٥	٠,٨٤	٠,٠٤١٧

بعاً : حصص الشركات في ٢٠٠٣/١٢/١ كما يلي :

$$\text{حصة (س)} = \frac{٨٤٠}{١٩٠٠} = ٤٤\%$$

$$\text{حصة (ص)} = \frac{٥٨٥}{١٩٠٠} = ٣١\%$$

$$\text{حصة (ع)} = \frac{٤٧٥}{١٩٠٠} = ٢٥\%$$

امساً : نصيب كل شركة في أول فبراير ٢٠٠٣ م :

• حصص الشركات في السوق في ٢٠٠٣/٢/١ =

$$\text{مصفوفة} \times \text{حصص الشركات} = \text{التحركات} \times \text{في أول ديسمبر} = \text{الإحتمالية سنة ٢٠٠٢ م}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٠,٤٥٨٦ \\ ٠,٣٠٢٠ \\ ٠,٢٣٩٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٤٤ \\ ٠,٣١ \\ ٠,٢٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٠٩ & ٠,٠٥٨٣ & ٠,٩٥٠٠ \\ ٠,٠٧ & ٠,٩٠٠٠ & ٠,٠١٢٥ \\ ٠,٨٤ & ٠,٠٤١٧ & ٠,٠٣٧٥ \end{pmatrix}$$

• أن أنصبة الشركات س ، ص ، ع من السوق في الفترة القادمة هي :

٤٤% : ٣٠% : ٢٤% على الترتيب •

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

مثال (٥)

شركة مقسمة إلى ثلاثة أقسام ، وتسمح هذه الشركة بحرية إنتقال العاملين بين الأقسام المختلفة ، وكانت حركات إنتقال العاملين بين الأقسام خلال الفترة من أول يونيو ٢٠٠٣ حتى أول سبتمبر ٢٠٠٣ كما يلي :

عدد العاملين في أول سبتمبر ٢٠٠٣	الإضافة من			عدد العاملين في أول يونيو ٢٠٠٣	القسم
	الأول	الثاني	الثالث		
٣٥	—	٢	٤	٣٠	الأول
٦١	١	—	٣	٦٠	الثاني
٣٤	—	١	—	٤٠	الثالث
١٣٠				١٣٠	المجموع

والمطلوب التنبؤ بعدد العاملين في كل قسم في ديسمبر ٢٠٠٣ م (النسب
المنوية للعاملين بكل قسم)

الحل :

أولاً : عمل جدول التدفقات :

عدد العاملين فى أول سبتمبر ٢٠٠٣	تحركات العاملين						عدد العاملين فى أول يونيو ٢٠٠٣	القسم
	الانتقال إلى			الانتقال من				
	الثالث	الثاني	الأول	الثالث	الثاني	الأول		
٣٥	—	١	—	٤	٢	—	٣٠	الأول
٦١	١	—	٢	٣	—	١	٦٠	الثاني
٣٤	—	٣	٤	—	١	—	٤٠	الثالث
١٣٠							١٣٠	المجموع

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

ثانياً : جدول الاحتمالات :

ع	ص	س	انشرة الإحتمال
$\frac{7-40}{40}$ $0.82 =$	$\frac{3-60}{60}$ $0.95 =$	$\frac{1-30}{30}$ $0.97 =$	الإحتفاظ
$0.10 = \frac{4}{40}$	$0.03 = \frac{2}{60}$	$0.03 = \frac{1}{30}$	نقص للأول
$0.08 = \frac{3}{40}$	$0.02 = \frac{1}{60}$	صفر = $\frac{\text{صفر}}{30}$	نقص للثاني

ثالثاً : يتم ترتيب الاحتمالات السابقة في شكل مصفوفة التحركات الاحتمالية (مصفوفة احتمالات الإنتقال) على النحو التالي :

$$\begin{pmatrix} 0.82 & 0.03 & 0.97 \\ 0.08 & 0.95 & 0.03 \\ 0.10 & 0.02 & \text{صفر} \end{pmatrix}$$

رابعاً : نسب العاملين في كل قسم في أول سبتمبر ٢٠٠٣ م كما يلي :-

$$\text{نسبة القسم الأول} = \frac{30}{130} = 23\%$$

$$\text{نسبة القسم الثاني} = \frac{60}{130} = 46\%$$

$$\text{نسبة القسم الثالث} = \frac{40}{130} = 31\%$$

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

خامساً : نصيب كل قسم في أول ديسمبر ٢٠٠٣ م :

$$\begin{pmatrix} \text{الأول} \\ \text{الثاني} \\ \text{الثالث} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٠,٣٠٢٠ \\ ٠,٤٧٥٤ \\ ٠,٢٢٢٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٧ \\ ٠,٤٧ \\ ٠,٢٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,١٠ & ٠,٠٣ & ٠,٩٧ \\ ٠,٠٨ & ٠,٩٥ & ٠,٠٣ \\ ٠,٨٢ & ٠,٠٢ & \text{صفر} \end{pmatrix} =$$

∴ النسب المئوية للعاملين في أول ديسمبر ٢٠٠٣ في الأقسام الثلاثة هي :

القسم الأول ٣٠%

القسم الثاني ٤٨%

القسم الثالث ٢٢%

حالة الثبات أو الإتزان في سلاسل ماركوف :

حالة الإتزان هي التي لابد أن تنتهي إليها عمليات التحول بين مختلف الحالات ، أو هي الحالة النهائية التي تحدث وتستمر طالما بقيت مصفوفة احتمالات الإنتقال (مصفوفة التحركات الاحتمالية) كما هي دون تغيير .
أولاً : تحديد حالة الإتزان (التوازن) إذا كانت مصفوفة احتمالات الإنتقال مكونة من حالتين فقط (٢×٢) :

مثال : إذا كانت مصفوفة احتمالات الإنتقال كما يلي :

$$\begin{matrix} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{س} & \begin{pmatrix} ٠,١٦ & ٠,٧ \end{pmatrix} \\ \text{ص} & \begin{pmatrix} ٠,٨٤ & ٠,٣ \end{pmatrix} \end{matrix}$$

فإن حصة (س) في حالة التوازن كما يلي :

إحتمال التحول من س إلى ص

حصة س = $\frac{\text{إحتمال التحول من س إلى ص} + \text{إحتمال التحول من س إلى س}}{\text{إحتمال التحول من س إلى ص} + \text{إحتمال التحول من س إلى س}}$

$$0,35 = \frac{0,16}{0,46} = \frac{0,16}{0,3 + 0,16}$$

$$0,065 = 0,35 - 1 = \text{حصة (ص)}$$

وللتأكد من ذلك نقوم بضرب مصفوفة احتمالات الانتقال \times حصص التوازن ، فيكون الناتج هو نفس حصص التوازن

$$\begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,65 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,16 & 0,7 \\ 0,84 & 0,3 \end{pmatrix}$$

مثال (٦)

إذا كانت مصفوفة احتمالات الانتقال لمنتجين أ ، ب كما يلي :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{matrix} \end{matrix}$$

المطلوب حساب حصة كل منتج عند نقطة التوازن ؟

الحل :

$$0,43 = \frac{0,3}{0,7} = \frac{0,3}{0,4 + 0,3} = \text{حصة التوازن بالنسبة للمنتج (أ)}$$

$$0,57 = 0,43 - 1 = \text{حصة التوازن بالنسبة للمنتج (ب)}$$

ويمكن الحل بطريقة مطولة كما يلي :

$$\begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \quad \therefore$$

$$(1) \quad \text{أ} = \text{ب} \cdot 0,3 + \text{أ} \cdot 0,6 \quad \therefore$$

$$(2) \quad \text{ب} = \text{أ} \cdot 0,7 + \text{ب} \cdot 0,4$$

وبتحويل المعادلتين إلى معادلات صفرية :

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

$$\therefore - ٠,٤ + ٠,٣ = \text{ب} = \text{صفر} \quad (٣)$$

$$٠,٤ - ٠,٣ = \text{ب} = \text{صفر} \quad (٤)$$

وبإضافة المعادلة :

$$١ = \text{ب} + \text{أ} \quad (٥)$$

وحيث أنه يوجد مجهولين وثلاث معادلات ، وبإهمال المعادلة (٣) ، وحل المعادلتين (٤) ، (٥) باستخدام المحددات ، فإن :

$$٠,٤٣ = \frac{٠,٣}{٠,٧} = \frac{٠,٣ + \text{صفر}}{٠,٣ + ٠,٤} = \frac{\begin{vmatrix} ٠,٣ - \text{صفر} & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٠,٣ - ٠,٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}} = ١$$

$$\therefore \text{ب} = ٠,٤٣ - ١ = -٠,٥٧$$

ثانياً : تحديد حالة الإرتان (التوازن) إذا كانت مصفوفة احتمالات الانتقال مكونة من ثلاث حالات (٣×٣) :

مثال : إذا كانت مصفوفة احتمالات الانتقال بين ثلاث شركات كما يلي :

$$\begin{matrix} & \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ٠,١٢ & ٠,٠٧ & ٠,٨ \\ ٠,٠٨ & ٠,٩٠ & ٠,١ \\ ٠,٨٠ & ٠,٠٣ & ٠,١ \end{pmatrix} \end{matrix}$$

فإنه لتحديد حصص التوازن ، نطبق العلاقة التالية :

مصفوفة التحركات الإحتمالية × متجه نصيب المصانع من السوق (في حالة

التوازن) = نفس متجه المصانع من السوق .

حوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,١٢ & ٠,٠٧ & ٠,٨ \\ ٠,٠٨ & ٠,٩٠ & ٠,١ \\ ٠,٨٠ & ٠,٠٣ & ٠,١ \end{pmatrix} \therefore$$

يمكن التعبير عن ذلك بثلاث معادلات على النحو التالي : —

$$(١) \quad ٠,٨س = ٠,١٢ع + ٠,٠٧ص + ٠,٨س$$

$$(٢) \quad ٠,١ص = ٠,٠٨ع + ٠,٩٠ص + ٠,١ص$$

$$(٣) \quad ٠,١ع = ٠,٨٠ع + ٠,٠٣ص + ٠,١ص$$

حيث أن مجموع أنصبة الثلاثة مصانع من السوق = ١ ، فإنه يمكن إضافة

معادله أخرى على النحو التالي :

$$(٤) \quad ١ = ع + ص + س$$

بإعادة ترتيب المعادلات نجد أن :

$$(٤) \quad ١ = ع + ص + س$$

$$(٥) \quad ٠,٢-س = ٠,١٢ع + ٠,٠٧ص + ٠,٢-س$$

$$(٦) \quad ٠,١ص = ٠,٠٨ع + ٠,١-ص + ٠,١ص$$

$$(٧) \quad ٠,١ع = ٠,٢-ع + ٠,٠٣ص + ٠,١ص$$

حيث أنه لدينا أربعة معادلات وثلاثة مجاهيل ، فإننا نهمل أحد المعادلات

لتكن المعادلة (٧) ، وبحل المعادلات الباقية باستخدام أى طريقه ولتكن

لمحددات أو المصفوفات ، أو بطريقة الحذف والتعويض ، فإننا نجد أن :

$$س = ٠,٣ \quad ص = ٠,٤٨ \quad ع = ٠,٢٢$$

ي أن حصص التوازن للشركات الثلاث هي :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٣ \\ ٠,٤٨ \\ ٠,٢٢ \end{pmatrix}$$

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

وللتحقق من صحة التوازن ، فإننا نضرب قيمة مصفوفة التحركات الإحتمالية \times قيمة حصص التوازن ، فسنجد أن الناتج هو نفس قيمة حصص التوازن قبل ضرب مصفوفة التحركات الإحتمالية فيه .

مثال (٧)

إذا كان لدينا مصفوفة احتمالات الإنتقال بين ثلاث منتجات (أ ، ب ، ج) كما يلي :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ٠,٨ & ٠,٢٠ & ٠,١٠ \\ ٠,١ & ٠,٧٠ & ٠,٣٠ \\ ٠,١ & ٠,١٠ & ٠,٦٠ \end{pmatrix} \end{matrix}$$

المطلوب إيجاد الأنصبة في حالة التوازن ؟

الحل :

لتحديد حصص التوازن ، نطبق العلاقة التالية :

$$\begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٨ & ٠,٢ & ٠,١ \\ ٠,١ & ٠,٧ & ٠,٣ \\ ٠,١ & ٠,١ & ٠,٦ \end{pmatrix} \therefore$$

ويمكن التعبير عن ذلك بثلاث معادلات على النحو التالي : -

$$(١) \quad \text{أ} = ٠,٨\text{أ} + ٠,٢\text{ب} + ٠,١\text{ج}$$

$$(٢) \quad \text{ب} = ٠,١\text{أ} + ٠,٧\text{ب} + ٠,٣\text{ج}$$

$$(٣) \quad \text{ج} = ٠,١\text{أ} + ٠,١\text{ب} + ٠,٦\text{ج}$$

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

وحيث أن مجموع الأنصبة الثلاثة = ١ . فإنه يمكن إضافة معادله أخرى على النحو التالي :

$$س + ص + ع = ١ \quad (٤)$$

وبإعادة ترتيب المعادلات وتحويله إلى معادلات صفرية ، نجد أن :

$$٠,٢- أ + ٠,٢ ب + ٠,١ ج = \text{صفر} \quad (٤)$$

$$٠,١ أ + ٠,٣- ب + ٠,٣ ج = \text{صفر} \quad (٥)$$

$$٠,١ أ + ٠,١ ب + ٠,٤- ج = \text{صفر} \quad (٦)$$

$$أ + ب + ج = ١ \quad (٧)$$

وحيث أنه لدينا أربعة معادلات وثلاثة مجاهيل ، فإننا نهمل أحد المعادلات ولتكن المعادلة (٦) ، وبحل المعادلات الباقية باستخدام أى طريقه ولتكن المحددات أو المصفوفات ، أو بطريقة الحذف والتعويض ، حيث تصبح المعادلات كما يلي :

$$٠,٢- أ + ٠,٢ ب + ٠,١ ج = \text{صفر} \quad (٤)$$

$$٠,١ أ + ٠,٣- ب + ٠,٣ ج = \text{صفر} \quad (٥)$$

$$أ + ب + ج = ١ \quad (٧)$$

وبفرض أن $أ = ٠,٤٥$ ، فإن :

$$٠,٠٩- أ + ٠,٢ ب + ٠,١ ج = \text{صفر} \quad (٨)$$

$$٠,٠٤٥ أ + ٠,٣- ب + ٠,٣ ج = \text{صفر} \quad (٩)$$

$$٠,٤٥ أ + ب + ج = ١ \quad (١٠)$$

ومن ثم نكون ثلاث معادلات كالآتي :

$$٠,٠٩- أ + ٠,٢ ب + ٠,١ ج = ٠ \quad (١١)$$

$$٠,٠٤٥ أ + ٠,٣- ب + ٠,٣ ج = ٠ \quad (١٢)$$

$$٠,٤٥ أ + ب + ج = ١ \quad (١٣)$$

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

ولما كان عدد المعادلات ثلاث وعدد المجاهيل إثنان ، فإننا نستبعد إحدى المعادلات ولتكن المعادلة (١٢)

$$(١١) \quad ٠,٠٩ = ج - ٠,١ + ب$$

$$(١٢) \quad ٠,٥٥ = ج + ب$$

وبضرب المعادلة (١٢) $\times ٠,٢$

$$(١٤) \quad ٠,١١ = ج - ٠,٢ + ب$$

وبطرح المعادلة (١١) من المعادلة (١٤)

$$(١٤) \quad ٠,١١ = ج - ٠,٢ + ب$$

$$(١٣) \quad ٠,٠٩ = ج - ٠,١ + ب$$

$$\therefore ٠,٠٢ = ج - ٠,١$$

$$\therefore ج = \frac{٠,٠٢}{٠,١} = ٠,٢$$

وحيث أن :

$$١ = ج + ب + أ$$

$$\therefore ١ = ٠,٢ + ب + ٠,٤٥$$

$$\therefore ب = ٠,٦٥ - ١ = ٠,٣٥$$

\therefore حصص التوازن هي :

$$أ \quad ب \quad ج$$

$$(٠,٢٠ \quad ٠,٣٥ \quad ٠,٤٥)$$

بحوث آتعمنيات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

سلاسل ماركوف وتحديد إستراتيجيات التسويق :-

تتعدد مجالات إستخدام أسلوب سلاسل ماركوف ليس فقط في التنبؤ
بخصائص السوق لشركات وتحديد حصص التوازن ، ولكن يمكن الإستفادة منه
أيضاً في ترشيح القرارات الإدارية في مجال تحديد إستراتيجيات التسويق
ولعل الأمثلة التالية توضح ذلك :

مثال (٨)

تفاضل إحدى الشركات بين استئجار مولدين كهربائيين يتمثلان في القيمة
الإيجارية ، ولقد توافرت لديك مصفوفة احتمالات الإنتقال لحالتي الزواج
والكساد لكل من المولدين كما يلي :

مصفوفة احتمالات الإنتقال للمولد الأول		مصفوفة احتمالات الإنتقال للمولد الثاني	
أ	ب	أ	ب
٠,٨	٠,٤	٠,٦	٠,٣
٠,٢	٠,٦	٠,٤	٠,٧

حيث أ تمثل حالة الزواج ، ب يمثل حالة الكساد وذلك لكل من المولدين ، فما
هو المولد الذي توصي الشركة باستئجاره ؟
الحل :

بالنسبة للمولد الأول :

$$٠,٤٣ = \frac{٠,٣}{٠,٣ + ٠,٤} = \text{احتمال أن يكون المولد في حالة رواج عند التوازن}$$

بحوث العمليات

(٨) تخيل سلاسل ماركوف

بالنسبة للمولد الثاني :

$$0,67 = \frac{0,4}{0,2 + 0,4}$$

ومعنى هذه النتائج أن احتمال بقاء المولد الأول في حالة رواج لحظة تحقق التوازن وما بعدها هو ٤٣٪ ، بينما احتمال بقاء المولد الثاني في حالة رواج لحظة تحقق التوازن وما بعدها هو ٦٧٪ ، ومن ثم نوصي الشركة باستئجار المولد الثاني .

مثال (٩)

آله لها ثلاث حالات من التشغيل ، حيث أ يمثل حالة التشغيل في حالة الرواج ، ب يمثل التشغيل في حالة العادية ، جـ يمثل التشغيل في حالة الكساد ، وكانت مصفوفة احتمالات الانتقال من ساعة إلى أخرى كما يلي :

	أ	ب	جـ
أ	0,70	—	0,5
ب	0,15	0,6	—
جـ	0,15	0,4	0,5

والمطلوب :

حدد احتمالات التوازن لكل حالة من الحالات الثلاث ؟

إذا كان ربح الساعة لكل حالة من الحالات الثلاث هو ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ للحالات

أ ، ب ، جـ ، على التوالي ، فأوجد متوسط الربح في الساعة ؟

وث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

حل :

إيجاد حالة التوازن كما سبق أن أوضحنا في حالة مصفوفة (3×3) ،
سنجد أن :

$$أ = ٠,٥٠٦ ، ب = ٠,١٩٠ ، ج = ٠,٣٠٤$$

متوسط الربح في الساعة عند حدوث التوازن والفترات التالية له =

$$١٠ - \times ٠,٣٠٤ + ٢٠ \times ٠,١٩ + ٣٠ \times ٠,٥٠٦ =$$

$$١٥,١٨ = ٣,٠٤ - ٣,٨ + ١٥,٩٤ = ١٥,٩٤ جنيه$$

ال (١٠)

نافس متجران للتجزئة على اجتذاب العملاء البالغ عددهم ١٠٠٠٠ عميل ،
لانت مصفوفة احتمالات الانتقال كما يلي :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} أ \\ ب \end{matrix} \\ \begin{matrix} أ \\ ب \end{matrix} & \begin{pmatrix} ٠,٣٥ & ٠,٧٥ \\ ٠,٦٥ & ٠,٢٥ \end{pmatrix} \end{matrix}$$

المطلوب تحديد متوسط مجمل الربح لكل متجر في حالة التوازن إذا علمت أن
جمل الربح لكل عميل هو ٣ جنيهات ؟

إذا علمت أن المتجر الأول يفاضل بين استراتيجيتين من أجل تحسين ربحيته
أولى تتمثل في القيام بحملة إعلانية تتكلف ٥٠٠ جنيه ، والثانية تتمثل في
قديم خصم قدره ٠,٢ جنيه للعملاء المبقين على التعامل مع المتجر .

إذا كانت الإستراتيجية الأولى ستؤدي إلى زيادة نسبة التحول من المتجر أ
صبح ٠,٤٥ بدلاً من ٠,٣٥ ، وفيما يتعلق بالإستراتيجية الثانية ستؤدي إلى
زيادة نسبة الإحتفاظ لدى المتجر أ من ٠,٧٥ إلى ٠,٨٠ ، فما هي
إستراتيجية التي توصي المتجر أ باتباعها ؟

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

الحل :

(١) إيجاد احتمالات التوازن :

$$0,58 = \frac{0,35}{0,60} = \frac{0,35}{0,25+0,35} = \text{أ}$$
$$0,42 = 1 - 0,58 = \text{ب}$$

∴ ربح المتجر الأول = $3 \times 0,58 \times 1000 = 1740$ جنيه

∴ ربح المتجر الثاني = $3 \times 0,42 \times 1000 = 1260$ جنيه

(٢) اختبار إستراتيجية الإعلان للمتجر الأول :

$$\begin{matrix} & \text{أ} & \text{ب} \\ \begin{matrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,75 & 0,45 \\ 0,25 & 0,55 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

∴ نسب التوازن الجديدة

$$0,64 = \frac{0,45}{0,70} = \frac{0,45}{0,25+0,45} = \text{أ}$$
$$0,36 = 1 - 0,64 = \text{ب}$$

∴ ربح المتجر الأول = $500 - (3 \times 0,64 \times 1000) = 1420$ جنيه

وعلى ذلك فإن هذه الإستراتيجية مرفوضة حيث أدت إلى تخفيض الربح بمقدار:

$$1740 - 1420 = 320 \text{ جنيه للمتجر الأول في حالة قيامه}$$

بالحملة الإعلانية.

(٣) إختبار إستراتيجية الخصم لدى المتجر الأول :

$$\begin{matrix} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \begin{pmatrix} ٠,٣٥ & ٠,٨٠ \end{pmatrix} \\ \text{ب} & \begin{pmatrix} ٠,٦٥ & ٠,٢٠ \end{pmatrix} \end{matrix}$$

∴ نسب التوازن الجديدة

$$٠,٦٤ = \frac{٠,٣٥}{٠,٥٥} = \frac{٠,٣٥}{٠,٢٠ + ٠,٣٥} = \text{أ}$$

∴ ربح المتجر الأول = $٢,٨ \times ٠,٦٤ \times ١٠٠٠ = ١٧٩٢$ جنيه

ويلاحظ أن هذه الإستراتيجية قد أدت إلى زيادة مجمل الربح لدى المتجر الأول من ١٧٤٠ جنيه إلى ١٧٩٢ جنيه ، ومن ثم نوصي المتجر الأول بتبني إستراتيجية الخصم .

مثال (١١)

بفرض أن مصفوفة التحركات الإحتمالية لثلاث شركات (س ، ص ، ع) تنتج وتبيع نفس المنتج ولكن تحت علامات تجارية مختلفة ، كانت على النحو التالي :

$$\begin{matrix} & \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{س} & \begin{pmatrix} ٠,٠٧ & ٠,٠٨ & ٠,٨٥ \end{pmatrix} \\ \text{ص} & \begin{pmatrix} ٠,٠٣ & ٠,٨٥ & ٠,١٠ \end{pmatrix} \\ \text{ع} & \begin{pmatrix} ٠,٩٠ & ٠,٠٧ & ٠,٠٥ \end{pmatrix} \end{matrix}$$

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

وبفرض عدم تغير إستراتيجيات التسويق للشركات الثلاثة ، وبقاء مصفوفة التحركات الإحتمالية دون تغيير ، فإن حصص التوازن تكون كما يلي :

$$\begin{matrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ (0,33 & 0,30 & 0,37) \end{matrix}$$

ونظراً لأن الشركة (ص) وجدت أن حصتها في السوق أقل الحصص ، وهذا لايتناسب مع مكانتها السابقة في السوق ، فقد فكرت الإدارة في حل يمكنها من تحسين وضعها في السوق وزيادة حصتها ، وبالدراسه إتضح أن هناك بديلان أمام الإدارة وهما :

البديل الأول :

تغيير سياسة البيع ونظام التحصيل من العملاء ويترتب على ذلك زيادة نسبة احتفاظها بعملائها من ٨٥% إلى ٩٠% في مقابل أن تقل نسبة ما تخسره إلى الشركة (س) من ٨% إلى ٣% .

البديل الثاني :

إدخال بعض التعديلات على طريقة تغليف المنتج ، وفي نفس الوقت القيام بحملة إعلانية لإعلام العملاء بهذا التطوير في التغليف ، ويترتب على هذا زيادة نسبة ما تكسبه من عملاء الشركة (س) إلى ١٥% وزيادة نسبة ما تكسبه من عملاء الشركة (ع) إلى ٥% .
هذا وترغب إدارة الشركة (ص) في المفاضلة بين هذين البديلين وإختيار أفضلهما على فرض أن :

١ - تكلفة البديلين متساوية .

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

٢- المبيعات الكلية من هذا المنتج للشركات الثلاث تُقدر بمبلغ ١٠ مليون جنيه ، وأن أرباح الشركة (ص) تعادل ١٥٪ من مبيعاتها ، ويُتوقع أن تستمر هذه التقديرات في الفترة القادمة . علماً بأن تكلفة البديل الأول تُقدر بمبلغ ٦٠٠٠٠ جنيه ، في حين تُقدر تكلفة البديل الثاني بمبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيه .

الحل :

التحليل المقترح

** البديل الأول :

طبقاً لهذا البديل تكون مصفوفة التحركات الإحتمالية على النحو التالي :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} ع & ص & س \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} ٠,٠٧ & ٠,٠٣ & ٠,٨٥ \\ ٠,٠٣ & ٠,٩٠ & ٠,١٠ \\ ٠,٩٠ & ٠,٠٧ & ٠,٠٥ \end{pmatrix} & \begin{matrix} س \\ ص \\ ع \end{matrix} \end{matrix}$$

وتكون حصص التوازن في هذه الحالة كما يلي :

$$\begin{pmatrix} ٠,٣٨ & ٠,٣٧ & ٠,٢٥ \end{pmatrix} \begin{matrix} ع \\ ص \\ س \end{matrix}$$

ويلاحظ زيادة حصة الشركة (ص) من ٣٠٪ إلى ٣٧٪ على حساب الشركة (س) ، وزيادة نصيب الشركة (ع) من ٢٧٪ إلى ٣٨٪ ، ونقص نصيب الشركة (س) من ٢٣٪ إلى ٢٥٪ .

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

**** البديل الثانى :**

طبقاً لهذا البديل تكون مصفوفة التحركات الإحتمالية على النحو التالى :

	ع	ص	س	
س	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٨٠	
ص	٠,٠٥	٠,٨٥	٠,١٥	
ع	٠,٨٨	٠,٠٧	٠,٠٥	

وتكون حصص التوازن فى هذه الحالة كما يلى :

ع	ص	س
(٠,٣٤	٠,٣٩	٠,٢٧)

ويلاحظ فى هذا البديل زيادة حصة الشركة (ص) من ٣٠ % إلى ٣٩ % ،
أي بزيادته قدرها ٩ % فى حين إنخفضت حصة الشركة (س) من ٢٣ % إلى
٢٧ % ، أي بنسبة ٤ % ، وكذلك إنخفضت حصة الشركة (ع) من ٣٧ % إلى
٣٤ % ، أي بنسبة ٣ % .

**** المفاضله بين البديلين :**

(١) فى حالة تساوى تكلفة البديلين :

يُعتبر البديل الثانى أفضل ، حيث أنه فى ظل البديل الثانى تصبح حصة
الشركة (ص) ٣٩ % ، فى حين أنها فى البديل الأول تصبح ٣٧ % .

(٢) فى حالة تساوى تكلفة البديلين :

تتم المفاضله على أساس مقارنة صافى العائد من كل بديل ويتم
إختيار البديل الذى يعظم دالة منفعة الشركة كما يلى :

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

بيان	البديل الأول	البديل الثاني
إيراد المبيعات الكلي	١٠٠٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠٠
حصة الشركة (ص)	$٠,٣٧ \times ١٠٠٠٠٠٠٠$ = ٣٧٠٠٠٠٠٠ جنيه	$٠,٣٩ \times ١٠٠٠٠٠٠٠$ = ٣٩٠٠٠٠٠٠ جنيه
نسبة ربح الشركة (ص)	١٥ %	١٥ %
الأرباح	٥٥٥٠٠٠	٥٨٥٠٠٠
طرح تكلفة البديل	٦٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠
صافي ربح البديل	٤٩٥٠٠٠	٤٨٥٠٠٠

على ضوء هذه المقارنه يفضل البديل الأول لأنه يحقق للشركة (ص) عائداً
أفضل من البديل الثاني .

مثال (١٢)

قُدمت إليك مصفوفة التحركات الإحتمالية (إحتتمالات الإنتقال) الخاصة بثلاث
مصانع (أ ، ب ، ج) تقوم بإنتاج نفس المنتج ولكن تحت علامات تجاريه
مختلفه ، وذلك كالآتي :

	أ	ب	ج
أ	٠,٦	٠,١	٠,٢
ب	٠,٢	٠,٥	٠,١
ج	٠,٢	٠,٤	٠,٧

وقد قام قسم التسويق في المصنع أ برسم استراتيجيه تسويقية تتضمن تفضيل
العملاء لعلامة الشركة وتحددت البدائل التالية :

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

البديل الأول : القيام بحملة إعلانية تُوجه إلى عملاء الشركة الأصلية وتضمن إرتفاع تفضيلهم لعلامة الشركة إلى ٧٥ % بدلاً من ٦٠ % ، وتخسر لحساب الشركة جـ ٥ % بدلاً من ٢٠ %

البديل الثاني : توجيه الحملة الإعلانية إلى عملاء الشركة ب وتغيير ميولهم لتفضيل علامة الشركة بحيث تكون نسبة العملاء المنتقلين إليها من الشركة ب ١٥ % بدلاً من ١٠ % ، ويكون ذلك على حساب ما تحتفظ به الشركة ب حيث يصبح ٤٥ % بدلاً من ٥٠ %

البديل الثالث : زيادة نسبة العملاء المنتقلين إليها من الشركة جـ إلى ٣٠ % بدلاً من ٢٠ % ، ويكون ذلك على حساب ما تحتفظ به الشركة جـ ليصبح ٦٠ % بدلاً من ٧٠ %

فإذا علمت أن :

١. تبلغ تكاليف الحملة الإعلانية ١٠٠٠٠٠٠ جنيه.
٢. تحقق الحملة الإعلانية زيادة في ربح الشركة بمقدار ٦٠٠٠ جنيه عن كل نقطة يمكن كسبها من حصة السوق.

والمطلوب :

١. حساب حصص السوق في حالة الإتزان للشركات الثلاثة قبل القيام بالحملة الإعلانية ؟
٢. ما هي استراتيجية الإعلان التي تحقق للشركة (أ) أكبر حصة في السوق ؟

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

الحل :

يتم إيجاد حصص التوازن للآتي :

$$1- \text{ قبل القيام بالحملة الإعلانية : } \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\text{وسنجد أن : } 0,27 = \text{أ} , 0,38 = \text{ب} , 0,35 = \text{ج}$$

$$2- \text{ البديل الأول : } \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,75 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 & 0,05 \end{pmatrix}$$

$$\text{وسنجد أن : } 0,50 = \text{أ} , 0,25 = \text{ب} , 0,25 = \text{ج}$$

$$3- \text{ البديل الثاني : } \begin{pmatrix} 0,2 & 0,15 & 0,6 \\ 0,1 & 0,45 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\text{وسنجد أن : } 0,32 = \text{أ} , 0,20 = \text{ب} , 0,48 = \text{ج}$$

$$4- \text{ البديل الثالث : } \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\text{وسنجد أن : } 0,36 = \text{أ} , 0,23 = \text{ب} , 0,41 = \text{ج}$$

ومن هنا نجد أن أفضل إستراتيجية للمصنع (أ) هي البديل الأول ، حيث بلغت

حصة (أ) = ٥٠ % بزيادة قدرها ٢٣ % ، أي أن

الأرباح الزائدة = ٢٣ × ٦٠٠٠ = ١٣٨٠٠٠ جنيه

يُخصم منها تكاليف الإعلان ١٠٠٠٠٠ جنيه :

$$138000 - 100000 = 38000 \text{ جنيه}$$

تعايير على سلاسل ماركوف

(١) إذا كانت مصفوفة احتمالات الانتقال لثلاث شركات (س، ص، ع) تنتج نفس السلعة مع اختلاف العلامة التجارية كالتالي:

س	ص	ع
س	٠,٢	٠,١
ص	٠,٦	٠,٥
ع	٠,٢	٠,٤

والمطلوب :

أولاً : حساب نصيب السوق في حالة الإئتران للشركات الثلاث ؟

ثانياً : إذا أرادت الشركة (س) توجيه مجهوداتها لزيادة نصيبها في السوق ، فأيهما أفضل للشركة (س) :

(أ) أن توجه مجهوداتها للإحتفاظ بنسبه أكبر من عملاتها على حساب (ص) ، أي تحتفظ بنسبة ٤٠% بدلاً من ٢٠% ، وتخسر لحساب (ص) ٤٠% بدلاً من ٦٠% .

(ب) أن تركز حملتها لكسب عدد أكبر من عملاء (ع) ، أي بنسبة ٤٠% من (ع) بدلاً من ٢٠% ، على أن يكون ذلك إما على حساب (ص) الذي يكسب ١٠% فقط بدلاً من ٣٠% ، أو على حساب (ع) نفسه بـ ٣٠% فقط بدلاً من ٥٠% .

وضح أثر كل بديل على كافة الشركات الثلاث ؟

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

(٢) إذا فرضنا أن نوع معين من المأكولات المحفوظة طُرح في السوق في وقت واحد بواسطة ثلاث مصانع ، وقد طرحت الثلاثة مصانع (أ ، ب ، ج) منتجاتها المختلفة لهذا الصنف المعين في يناير ، وفي البدايه كان نصيب كل مصنع = ثلث السوق ، وخلال السنه حدثت التطورات التاليه :

- المصنع (أ) يحتفظ بـ ٨٠٪ من عملائه ، وخسر ١٢٪ للمصنع (ب) ، وخسر ٨٪ للمصنع (ج) .
 - المصنع (ب) يحتفظ بـ ٧٠٪ من عملائه ، وخسر ٢٠٪ للمصنع (أ) ، وخسر ١٠٪ للمصنع (ج) .
 - المصنع (ج) ، يحتفظ بـ ٩٠٪ من عملائه ، وخسر ٥٪ للمصنع (أ) ، وخسر ٥٪ للمصنع (ب) .
- وإذا فرضنا أن السوق لم يتسع :

(١) ماهو نصيب كل مصنع من السوق في العام القادم ؟

(٢) تنبأ بحالة الإئتران إذا بقيت العادات الشرائيه بدون تغيير ؟

(٣) في أول يونيه كان مخبز (أ) يحصل على ٤٠٪ من السوق المحليه ، وكان مخبزي (ب) ، (ج) كل منهما يحصل على ٣٠٪ من السوق المحليه ، وبعد عمل بحث تسويقي وجد أن مخبز (أ) يحتفظ بـ ٨٥٪ من عملائه في كل شهر ، بينما يحصل على ٥٪ من عملاء مخبز (ب) ، ١٠٪ من عملاء مخبز (ج) ، أما مخبز (ب) يحتفظ بـ ٩٠٪ من عملائه ، ويحصل على ٥٪ من عملاء (ج) ، أما مخبز (ج) يحتفظ بـ ٨٥٪ من عملائه ، ويحصل على ١٠٪ من عملاء (أ) ، ٥٪ من عملاء (ب) ، والمطلوب : - (١) إيجاد حصة كل مخبز من السوق في أول أغسطس ؟

(٢) ماهي حصة كل مخبز في السوق في حالة الإئتران ؟

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

(٤) فى آخر ديسمبر ١٩٨٦ كان نصيب الشركه (أ) من السوق ٢٠ ٪ ، وكان نصيب كل من الشركات (ب) ، (جـ) ٣٠ ٪ ، ٥٠ ٪ على الترتيب وخلال العام ١٩٨٦ كانت مبيعات هذه الصنلعه ١٠٠ مليون جنيه ، وكانت للشركه (أ) أرباح تعادل ٢ ٪ من المبيعات ، ومن المتوقع أن يستمر هذين الرقمين كما هما فى العام ١٩٨٧ .

وترغب الشركه (أ) فى القيام بحمله إعلانيه إضافيه تبلغ تكلفتها ٥٠٠٠٠ جنيه ، وسوف تحقق لها الإحتفاظ بنسبة ٦٠ ٪ من العملاء وتربح ١٠ ٪ من الشركه (ب) ، ٢٠ ٪ من الشركه (جـ) ، ومن المتوقع أن تحتفظ الشركه (ب) بنسبة ٥٠ ٪ من العملاء ، وتربح ٢٠ ٪ من (أ) ، ١٠ ٪ من (جـ) ، أما الشركه (جـ) فمن المتوقع أن تحتفظ بنسبة ٧٠ ٪ من العملاء ، وتربح ٢٠ ٪ من (أ) ، ٤٠ ٪ من (ب)

والمطلوب : -

(١) حساب حصص الشركات الثلاث فى السوق عام ١٩٨٧ م ؟

(٢) هل يجب أن تقوم الشركه (أ) بالحمله الإعلانيه ؟

(٥) فى أول يولييه كانت الشركه (أ) تحصل على ٤٠ ٪ من السوق المحليه وكان كل من الشركتين (ب) ، (جـ) تحصل على ٣٠ ٪ من السوق المحليه ، وقد قامت الشركه (ب) باقتراح القيام بالإعلان من خلال ثلاث وسائل إعلانيه .

وقد ظهرت مصفوفة التحركات الإحتماليه للعملاء طبقاً لكل وسيله من الوسائل الإعلانيه كالاتى :

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

$$\begin{pmatrix} ٠,١ & ٠,٣ & ٠,٧ \\ ٠,٧ & ٠,٦ & ٠,٢ \\ ٠,٢ & ٠,١ & ٠,١ \end{pmatrix} = \text{التلفزيون}$$

$$\begin{pmatrix} ٠,١ & ٠,١ & ٠,٤ \\ ٠,٢ & ٠,٧ & ٠,٥ \\ ٠,٧ & ٠,٢ & ٠,١ \end{pmatrix} = \text{الراديو}$$

$$\begin{pmatrix} - & - & ٠,٢ \\ ٠,٢ & ٠,٧ & ٠,٥ \\ ٠,٨ & ٠,٣ & ٠,٣ \end{pmatrix} = \text{الجرائد}$$

فإذا كانت تكلفة الإعلان في كل وسيله إعلانيه تبلغ : ٦٠٠ ، ٢٧٠٠ ، ٩٠٠ جنيه شهرياً .

المطلوب :

- ١- حصة كل شركة في السوق في أول أغسطس في ضوء كل وسيله إعلانيه ؟
- ٢- ما هي حصة كل شركة في السوق في ضوء كل وسيله إعلانيه في حالة التوازن
- ٣- ما هي أفضل وسيله إعلانيه للشركة (ب) ؟
- ٤- ما هي أرباح الشركة (ب) من كل وسيله إعلانيه إذا علمت أنها تحقق ٥٠ جنيه أرباح عن كل نسبه ١% إضافيه في حصتها السوقيه ؟

(٦) في أول يناير قام المصنع (ص) بتقديم منتج جديد في السوق بعد عمل بحث تسويقي وجد أن المصنع (س) يحتفظ بـ ٢٠% من عملائه في كل شهر بينما يحصل على ١٠% من عملاء مصنع (ص) ، وعلى ٥% من عملاء مصنع (ع) . أما المصنع (ص) يحتفظ بنسبة ٦٠% من عملائه ويحصل على ٥٠% من عملاء مصنع (س) وعلى ٤٠% من عملاء مصنع (ع) ، أما المصنع (ع) فيحتفظ بـ ٥٥% من عملائه ويحصل على ٣٠% من (س) ، وعلى ٣٠% من عملاء (ص) .

فما هي حصة كل مصنع في السوق في حالة التوازن ؟

(٧) فيما يلى مصفوفة الانتقال الإحتماليه الخاصه بالمصانع (س، ص، ع)

	ع	ص	س
س	٠,١٠٠	٠,١٠٠	٠,٨٠٠
ص	٠,٠٣٠	٠,٩٠٠	٠,٠٧٠
ع	٠,٨٥٠	٠,٠٦٧	٠,٠٨٣

وكانت حصص السوق فى أول مارس ٢٠٠٣ م (٢٥% ، ٤٠% ، ٣٥%)
للمصانع الثلاثه على الترتيب ، حدد حصص هذه المصانع فى السوق فى أول
أبريل ، وأول مايو من نفس السنه ؟.

(٨) حلل مصفوفة التحركات الإحتماليه التاليه ، ثم حدد مدى توازن أنصبه
السوق لكل من المصانع (أ ، ب ، ج) :

	ج	ب	أ
أ	٠,١٠	٠,١٠	١
ب	٠,٠٥	٠,٧٥	-
ج	٠,٨٥	٠,١٥	-

(٩) فى أول سبتمبر كان المشتركون فى الصحف اليوميه فى منطقه محدده
كالتالى :

الأهرام ٥٠% الأخبار ٢٥% الجمهوريه ٢٥%

بحوث العمليات

(٨) تحليل سلاسل ماركوف

وفي خلال شهر سبتمبر حدثت التغيرات التالية :

- احتفظت الأهرام بـ $\frac{7}{8}$ من المشتركين ، وخسرت $\frac{1}{8}$ منهم للأخبار
- احتفظت الأخبار بـ $\frac{1}{12}$ من المشتركين ، وخسرت $\frac{3}{4}$ منهم للأهرام ،
- $\frac{1}{6}$ منهم للجمهوريه .
- احتفظت الجمهوريه بـ $\frac{1}{3}$ من المشتركين ، وخسرت $\frac{1}{3}$ منهم للأهرام
- $\frac{1}{3}$ منهم للأخبار .

فإذا فرضنا عدم وجود مشتركين جدد ، وأن أحداً من المشتركين لن يستغن
عن اشتراكه .

المطلوب :

- ١ . تحديد نصيب كل جريدة من المشتركين في أول أكتوبر ؟
- ٢ . إذا استمر نمط المكسب والخسارة بالنسبة للصحف كما هو خلال شهر
أكتوبر ، فما هو نصيب كل جريدة من المشتركين في أول نوفمبر ؟
- ٣ . إذا استمر نمط المكسب والخسارة بالنسبة للصحف كما هو كل شهر ،
فما هو نصيب كل جريدة من المشتركين في حالة التوازن ؟

الفصل التاسع

طريقة النقل

The Transportation Method

مُتَكَلِّفَة

تتعلق مشكلة النقل بقرارات تخصيص أو تعيين الطريقة المثلى للإنتقال المادي لكميات من السلع توجد في نقاط معينة يُطلق عليها نقاط التوريد أو الإمداد (من المصانع مثلاً) إلى مواقع أخرى يُطلق عليها نقاط الطلب (إلى المخازن أو إلى مناطق التوزيع) ، وذلك بشرط أن تصل التكلفة الكلية للنقل أدنى ما يمكن . فتكاليف النقل من الأهمية بالنسبة للإدارة بحيث أن أي توفير فيها يعود على الشركة بأرباح طائلة .

مشكلة النقل هي نموذج رياضي تم تكوينه بشكل خاص مستهدفاً تحديد البديل الأمثل لنقل وتوزيع كميات معينة من ما هو متاح من مصادر التوريد إلى مناطق استهلاك أو مستودعات نحتاج تموينها بكميات معينة، بحيث تصل تكلفة النقل إلى حدها الأدنى .

خطوات حل مشكلة النقل :

(١) إعداد الحل المبدئي الممكن :

ويقوم هذا الحل المبدئي الممكن على أساس تلبية احتياجات مناطق التوزيع أو المخازن في حدود طاقة المصانع ، ويمكن إعداد الحل المبدئي الممكن باستخدام إحدى طريقتين :

١ . طريقة الركن الأيمن العلوي (طريقة الركن الشمالي الشرقي)

٢ . طريقة أدنى تكلفة

(٢) إختبار مثالية الحل :

بعد إعداد الحل المبدئي الممكن يتم اختبار مثالية هذا الحل لتحديد مدى إمكانية تخفيض تكلفة النقل بتغير الحل ، وإذا اتضح من اختبار المثالية أن الحل غير أمثل يتم تعديل الحل إلى أن يتم الوصول إلى الحل الأمثل ، ويمكن اختبار مثالية الحل باستخدام عدة طرق أهمها :

١ . طريقة حجر الوطاء (الحجر المتنقل) أو استبنج ستون .

٢ . طريقة التوزيع المعتدل

ونظراً لطبيعة مشكلة النقل ، يُستخدم لحلها جدول خاص يُسمى جدول النقل يتكون من عدد من الصفوف يساوي عدد المصادر (المصانع) وعدد من الأعمدة يساوي عدد مناطق التوزيع (أو الإستهلاك) وتُعرف الخلية بأنها تقاطع المصدر (المصنع) مع منطقة التوزيع . ويُوضع في الخلية الكميات التي يتقرر نقلها من المصدر إلى منطقة التوزيع، وتُوضع تكلفة النقل في مربع صغير في الركن الأيسر العلوي من كل خلية .

عدد الخلايا في كل جدول = عدد المصادر × عدد مناطق التوزيع

وبغرض توضيح مشكلة النقل وكيفية صياغتها كمسكلة سنطرح المثال التالي الذي روعي فيه التبسيط بغرض التوضيح .

مثال توضيحي :

تنتج إحدى الشركات الكبرى في ج.م.ع. منتجاً واحداً متماثلاً في ثلاث مصانع نوعية تقع جغرافياً في طنطا ، المنصورة ، دمنهور ، وتبلغ طاقات المصانع الثلاثة في السنة القادمة من الوحدات المنتجة الكميات التالية (بآلاف الوحدات) ١٥٠ ، ١٢٠ ، ٨٠ على الترتيب .

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

ويتم نقل تلك الكميات إلى مخازن التوزيع الأربعة التابعة للشركة ليتم تسليمها بعد ذلك إلى العملاء ، وتبلغ احتياجات تلك المخازن الأربعة من نفس السنة التخطيطية القادمة ما مقداره كالاتي (بالألف وحدة) مخزن الأسكندرية ٦٠ ، مخزن المحلة ١٣٠ ، مخزن كفر الشيخ ١١٠ ، مخزن الزقازيق ٥٠ ، ولقد توفر للشركة المعلومات الكاملة والمتعلقة بتكلفة نقل الوحدة من كل مصنع من المصانع الثلاثة إلى كل مخزن من مخازن التوزيع الأربعة ، وكانت هذه التكلفة كما هو مبين في الجدول التالي :

المخزن المصنع	تكلفة نقل الوحدة باجنيهاات إلى			
	الأسكندرية	المحلة	كفر الشيخ	الزقازيق
طنطا	٦	١٢	٤	٣
المنصورة	٨	١٥	٧	٨
دمنهوور	٣	١١	٢	٥

والمطلوب :

إيجاد جدول النقل أو (الشحن) الأمثل للفترة التخطيطية القادمة ، والذي يفى باحتياجات المخازن الأربعة من انتاج المصانع الثلاثة ، بحيث تصل تكلفة النقل إلى أدنى حد ممكن؟.

الحل :

أولاً : صياغة المشكلة في صورة جدول :

وهنا يتم عمل جدول يسمى جدول النقل يتكون من صفوف = عدد المصانع ، وأعمدة = عدد المخازن ويوضع في الخلية تكلفة النقل في مربع صغير في الركن الأيسر سطوي من كل خلية .

(٩) طريقة النقل

بحوث العمليات

إجمالي العرض	س٤	س٣	س٢	س١	إلى / من
١٥٠	٣	٤	١٢	٦	أ١
١٢٠	٨	٧	١٥	٨	أ٢
٨٠	٥	٢	١١	٣	أ٣
٣٥٠	٥٠	١١٠	١٣٠	٦٠	إجمالي الطلب

ثانياً : إيجاد الحل المبدئي باستخدام إحدى الطريقتين :

١. طريقة الركن الشمالي الشرقي North west corner method

٢. طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة

وسوف نتناول كلا الطريقتين على النحو التالي :

(١) طريقة الركن الشمالي الشرقي : North west corner method

ابدأ بالخلية الواقعة في أعنى اليمين وهي الخلية أ١س١ وضع بها كمية من الوحدات تساوي كمية صفها أو كمية عموده أيهما أقل ، ثم تحرك إلى يسار الخلية أو إلى أسفلها (حسب مقتضيات الحال) وأشغلها بكمية تساوي كمية صفها أو كمية عمودها أيهما أقل ٠٠٠ ويتم الإستمرار في هذا العمل حتى يتم مقابلة كل قيود التوريد وقيود الطلب ، وسيظهر جدول الحل المبدئي وخطواته طبقاً لطريقة الركن الشمالي الشرقي كما يلي :

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

من \ إلى	س١	س٢	س٣	س٤	العرض
أ١	٦	١٢	٤	٣	١٥٠
أ٢	٨	١٥	٧	٨	١٢٠
أ٣	٣	١١	٢	٥	٨٠
الطلب	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

وستكون التكلفة الإجمالية للنقل وفقاً للجدول المبني =

$$٥ \times ٥٠ + ١٢ \times ٣٠ + ٧ \times ٨٠ + ١٥ \times ٤٠ + ١٢ \times ٩٠ + ٦ \times ٦٠ =$$

$$= ٢٩١٠ \text{ جنيه.}$$

(٢) طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة :

يتم البحث في المصفوفة كلها عن تلك الخلية التي تكون فيها تكلفة نقل الوحدة أدنى تكلفة بالمصفوفة كلها ، وبالنظر إلى المصفوفة التي تمثل المثال الحالي ، نجد أن الخلية أ٣س٣ هي تلك الخلية التي تمثل فيها تكلفة نقل الوحدة أدنى تكلفة بالمصفوفة كلها (٢ جنيه للوحدة) ، عندئذ يتم شغل تلك الخلية بكمية صفها ٨٠ وحدة أو كمية عمودها ١١٠ وحدة أيهما أقل ، أي يتم شغلها بكمية مقدارها ٨٠ وحدة ، ويتم استئزال هذه الكمية من طاقة المصنع أ٣ والذي يتبين أنه استنفذ طاقته بالكامل ، ويتم استئزالها أيضاً من احتياجات المخزن س٣ ، فيصبح هذا المخزن في حاجة إلى ٣٠ وحدة فقط (٨٠-١١٠) . ثم يتم البحث بعد ذلك عن خلية ذات أقل تكلفة نقل للوحدة

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

للمصفوفة كلها ، ويتم الإستمرار في هذا العمل حتى يتم مقابل كل قيود التوريد وقيود الطلب ، وسيظهر جدول الحل المبدئي وخطواته طبقاً لطريقة أدنى تكلفة في المصفوفة كما يلي :

من \ إلى	س١	س٢	س٣	س٤	العرض
أ١	٦	١٢	٤	٣	١٥٠
	٦٠	١٠	٣٠	٥٠	
أ٢	٨	١٥	٧	٨	١٢٠
		١٢٠			
أ٣	٣	١١	٢	٥	٨٠
			٨٠		
الطلب	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

وستكون التكلفة الإجمالية للنقل وفقاً للجدول المبدئي =

$$٢ \times ٨٠ + ١٥ \times ١٢٠ + ٣ \times ٥٠ + ٤ \times ٣٠ + ١٢ \times ١٠ + ٦ \times ٦٠ =$$

$$= ٢٧١٠ \text{ جنيه}$$

ثالثاً : تحديد الأمثلية :

وفقاً لمنهج طريقة النقل . فإن إيجاد الحل المبدئي الممكن يعتبر بمثابة الخطوة الأولى من خطوات حل مشكلة النقل ، وتكون الخطوة الثانية هي اختبار أمثلية الحل ، فإذا ما اتضح أن الحل أمثلاً نكون قد توصلنا إلى حل المشكلة ، أما إذا تبين أن الحل غير أمثل ، فإن الأمر يتطلب الإستمرار في العمل نحو تحسينه ، ويتم اختبار الأمثلية لمشاكل النقل بإحدى الطريقتين التاليتين :

١. طريقة نقطة الارتكاز (حجر الوطاء) Stepping Stone Method

٢. طريقة التوزيع المعتدل Modified Destribution Method

الطريقة الأولى : طريقة نقطة الارتكاز (حجر الوطاء)

ولتوضيح هذه الطريقة فإننا نأخذ جدول الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي ، وبفرض أننا نرغب في اختبار مثالية هذا الجدول ، فإن ذلك يتطلب اختبار مثالية كافة الخلايا الفارغة. وتقضي طريقة نقطة الارتكاز أن يتم تقييم تلك الخلايا غير المشغولة وغير المستغلة وذلك بغرض الوقوف على أثر شغل كل منها على التكاليف ، فإذا تبين أن شغل خلية ما بوحدة واحدة مثلاً سيزيد عليه خفض تكاليف النقل ، فإن جدول النقل يتم إعادة تعديله للاستفادة من ذلك . إن عملية التقييم هذه تتم من خلال تحديد خط سير الزيادات والتخفيضات ومن ثم المحصلة النهائية ، ولذلك هناك بعض الإعتبارات الواجب ملاحظتها عند تحديد خط السير وهي :

١. أن يكون خط السير (مسار الحلقة المغلقة) Closed Loop في صورة خطوط أفقية ورأسية ، أي يتعين أن تكون زوايا المسار كلها زوايا قائمة.

٢. أن يمر خط السير بخلايا مشغولة حتى يمكن تصور النقل منها ، ولكن هذا لا يمنع المرور بخلايا مشغولة دون الإنتقاص منها أو المرور بخلايا فارغة دون الإضافة إليها ، وذلك حفاظاً على كميات الصفوف والأعمدة.

٣. يُراعى دائماً الحفاظ على توازن الصفوف والأعمدة.

٤. مسار الحلقة المغلقة عبارة عن مضلع جميع أركانه يتشكل من خلايا مشغولة عدا واحدة فقط هي الخلية التي يُراد تقييمها.

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

ملحوظة :

عند رسم المسار بدءاً من الخلية الفارغة ، توضع 'شارة (+)' في الخلية الفارغة المطلوب تقييمها ، ثم نبدأ باستكمال المسار بوضع الإشارة (-) في أول خلايا المسار ، ثم نستمر في استكمال الزوائد والنواقص وفقاً لهذا المسار .

عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١

$$= 3 + 4 - 1 = 6 \text{ خلايا مشغولة}$$

جدول لتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة
أ _١ س _٣	أ _١ س _٣ - أ _١ س _٢ + أ _٢ س _٣ - أ _٢ س _١	١٢ - ١٥ + ٧ - ٤ = صفر
أ _١ س _٤	أ _١ س _٤ - أ _١ س _٣ + أ _٣ س _٤ - أ _٣ س _٢ + أ _٢ س _٤ - أ _٢ س _١	١٥ + ٧ - ٢ + ٥ - ٣ - ١٢ = ٤
أ _٢ س _١	أ _٢ س _١ - أ _٢ س _٣ + أ _٣ س _١ - أ _٣ س _٢	١٥ - ١٢ + ٦ - ٨ = ١
أ _٢ س _٤	أ _٢ س _٤ - أ _٢ س _٣ + أ _٣ س _٤ - أ _٣ س _٢	٧ - ٢ + ٥ - ٨ = ٢
أ _٣ س _١	أ _٣ س _١ - أ _٣ س _٣ + أ _٣ س _٤ - أ _٣ س _٢ + أ _٢ س _٤ - أ _٢ س _١	٧ + ١٥ - ١٢ + ٦ - ٣ - ١ = ٢
أ _٣ س _٢	أ _٣ س _٢ - أ _٣ س _٣ + أ _٣ س _٤ - أ _٣ س _١	١١ - ٧ + ١٥ - ٢ = ١

وباستعراض قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا الستة التي يتم تقييمها يتضح أن هناك قيماً موجبة وقيماً صفرية وقيماً سالبة ، وهذا يعني الأمور التالية:

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

♦ قيمة صافي التغير في التكلفة ذات الإشارة الموجبة ، تعني أن النقل إلى هذه الخلية غير ناجح لأنه يترتب عليه ارتفاع في التكاليف .

♦ قيمة صافي التغير الصفري ، تعني أن النقل عبر هذه الخلية لن يترتب عليه أي تأثير على التكاليف الإجمالية للنقل .

♦ قيمة صافي التغير في التكلفة ذات الإشارة السالبة والتي ظهرت عند الخلايا $١س$ ، -٤ ، $٢س$ ، -١ ، $١س$ ، -٢ ، $٣س$ ، -١ ، تعني أن النقل عبر تلك الخلايا ناجح وسيترتب عليه انخفاض في التكاليف بمقدار صافي التغير بكل وحدة يتم نقلها . ومعنى ذلك أنه إذا ظهرت قيمة سالبة لصافي التغير لأي خلية فارغة ، فإن ذلك يعني أن الحل غير أمثل .

وبتطبيق هذه القاعدة على الجدول المبدئي السابق نستطيع أن نقول أنه جدول غير أمثل لوجود قيم صافي تغير سالبة للخلايا الفارغة . ولتحسين الحل فإننا نختار الخلية ذات أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف صافي التغير ، وبتطبيق هذا المعيار فإن الخلية $١س$ هي المرشحة للدخول ، حيث يبلغ صافي التغير بها (-٤) وهي أكبر قيمة بإشارة سالبة .

وبعد ذلك نحدد أكبر قيمة للمتغير الداخل وهي أقل كمية بالمسار للخلايا التي وضعت بها الإشارات السالبة وهي الخلية $٣س$ ؛ حيث المية = ٥٠ . وبعد ذلك يتم تعديل نمط النقل بالجدول المبدئي وحساب تكلفته الجديدة وذلك بعد اختيار المتغير (الخلية) الداخل وهو $١س$ ، وبعد تحديد أقصى كمية يمكن نقلها عبر تلك الخلية (٥٠ وحدة) تأتي الخطوة التالية لتعديل نمط النقل الذي كان بالجدول المبدئي وتتضمن هذه الخطوة ما يلي :

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

١. إضافة ٥٠ وحدة إلى الخلية التي تم اختبارها للنقل عبرها وهي الخلية أ١ س١؛
٢. خصم وإضافة ذات الكمية (٥٠ وحدة) إلى الخلايا الواقعة على مسار سلسلة الزوائد والنواقص ، بمعنى عندما نجد أن إشارة الخلية موجبة يتم إضافة ٥٦ وحدة بالإضافة للكمية الموجودة بها ، وعندما نجد أن إشارة الخلية سالبة نخصم من الكمية الموجودة بها ٥٠ وحدة
٣. الكميات الموجودة بخلايا غير واقعة على سلسلة الزوائد والنواقص لا يتحقق أي تعديل بل تُنقل كما هي :

الكمية	الخلايا التي يشملها التعديل
$٥٠ - ٥٠ =$ صفر	أ٣ س١ (-)
$٨٠ = ٥٠ + ٣٠$	أ٣ س٢ (+)
$٣٠ = ٥٠ - ٨٠$	أ٢ س٢ (-)
$٩٠ = ٥٠ + ٤٠$	أ٢ س١ (+)
$٤٠ = ٥٠ - ٩٠$	أ١ س٢ (-)

الجدول الثاني

من \ إلى	س١	س٢	س٣	س٤	العرض
أ١	٦٠	٤٠	٤٠	٣٠	١٥٠
أ٢	٨٠	٩٠	٣٠	٧٠	١٢٠
أ٣	٣٠	١١٠	٨٠	٥٠	٨٠
الطلب	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

وبناءً على تعديل نمط النقل الذي يظهر بالجدول الثاني للحل ، فإن

تكاليف النقل الكلية طبقاً للجدول الثاني للحل تحسب كما يلي :

$$\text{تكاليف النقل الكلية} = ١٥ \times ٩٠ + ٣ \times ٥٠ + ١٢ \times ٤٠ + ٦ \times ٦٠$$

$$+ ٧ \times ٣٠ + ٢ \times ٨٠ = ٢٧١٠ \text{ جنيه}$$

وبمقارنة هذه التكاليف بتكلفة الجدول المبدئي الذي تم تم إعداده

بطريقة الركن الشمالي الشرقي ، نجد أن هذه التكلفة تقل بمقدار ٢٠٠ جنيهه

(٢٧١٠ - ٢٩١٠) ، حيث تبين من اختبار المثالية أن كل وحدة يتم نقلها عبر

تلك الخلية تعمل على تخفيض في التكلفة مقدارها ٤ جنيه ، أي أن :

$$\text{التخفيض الكلي} = ٤ \times ٥٠ = ٢٠٠ \text{ جنيه.}$$

إختبار مثالية الحل بالجدول الثاني :

ويتم ذلك باتباع الأسلوب السابق توضيحه وهو تقييم الخلايا الفارغة.

جدول لتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة
أ _١ س _٢	أ _١ س _٣ - أ _٢ س _٢ + أ _٢ س _١ - أ _١ س _١	٤ - ٧ + ١٥ - ١٢ = صفر
أ _٢ س _١	أ _٢ س _١ - أ _١ س _١ + أ _١ س _٢ - أ _٢ س _٢	٨ - ٦ + ١٥ - ١٥ = ١ -
أ _٢ س _٤	أ _٢ س _٤ - أ _١ س _٤ + أ _١ س _٢ - أ _٢ س _٢	٨ - ٣ + ١٥ - ١٥ = ٢ +
أ _٣ س _١	أ _٣ س _١ - أ _١ س _٣ + أ _١ س _٢ - أ _٢ س _٢ + أ _٢ س _١ - أ _١ س _١	٣ - ٢ + ١٥ - ٧ + ١٢ - ١٢ = ٦ -
أ _٣ س _٢	أ _٣ س _٢ - أ _٢ س _٢ + أ _٢ س _١ - أ _٣ س _١	١١ - ٧ + ١٥ - ٢ = ١ +
أ _٣ س _٤	أ _٣ س _٤ - أ _١ س _٤ + أ _١ س _٢ - أ _٢ س _٢ + أ _٢ س _٣ - أ _٣ س _٣	٥ - ٣ + ١٥ - ٧ + ٣ - ٣ = ٢ -

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

وباستعراض قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا الستة التي يتم تقييمها يتضح أن هناك خليتين لهما نفس قيمة صافي تغير سالبة ، وهذا يعني أن الجدول الثاني ليس حلاً أمثلاً ويحتاج إلى تحسين .

تحسين الحل :

اختيار المتغير الداخل ، وسنجد أن الخليتين ذات صافي التغير السالب مرشحتان للدخول ، ويمكن الاختيار الجغرافي بينهما أو يمكن اختيار الخلية التي يمكن أن يتم نقل كمية أكبر إليها . نختار $١س٢$ ، ثم نحدد أقل كمية بالمسار للخلايا التي وضعت بها الإشارات السالبة نجدها = ٦٠

الكمية	الخانات التي يشملها التعديل
$٦٠ - ٦٠ = \text{صفر}$	$١س١ (-)$
$١٠٠ = ٦٠ + ٤٠$	$١س٢ (+)$
$٣٠ = ٦٠ - ٩٠$	$٢س٢ (-)$

الجدول الثالث

من	إلى	١س	٢س	٣س	٤س	العرض
١		٦	١٢	٤	٣	١٥٠
			١٠٠		٥٠	
٢		٨	١٥	٧	٨	١٢٠
		٦٠	٣٠	٣٠		
٣		٣	١١	٢	٥	٨٠
				٨٠		
الطلب		٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

(٩) طريقة النقل

بحوث العمليات

وبناءً على تعديل نمط النقل الذي يظهر بالجدول الثالث للحل ، فإن

تكاليف النقل الكلية طبقاً للجدول الثاني للحل تحسب كما يلي :

$$\text{تكاليف النقل الكلية} = ١٥ \times ٣٠ + ٨ \times ٦٠ + ٣ \times ٥٠ + ١٢ \times ١٠٠ =$$

$$٢٦٥٠ = ٢ \times ٨٠ + ٧ \times ٣٠ +$$

ومرة أخرى نعود لإختبار مثالية الحل بالجدول الثالث عن طريق تقييم

الخلايا الفارغة كما يلي :

جدول تقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة
أ _١ س _١	أ _١ س _١ - أ _١ س _٢ + أ _٢ س _١ - أ _٢ س _٢	١ - ٦ + ١٢ - ٨ = ١
أ _١ س _٣	أ _١ س _٣ - أ _١ س _٢ + أ _٢ س _٣ - أ _٢ س _٢	٤ - ٧ + ١٥ - ١٢ = صفر
أ _٢ س _٤	أ _٢ س _٤ - أ _٢ س _١ + أ _٣ س _٤ - أ _٣ س _١	٨ - ٣ + ١٢ - ١٥ = ٢
أ _٣ س _١	أ _٣ س _١ - أ _٣ س _٢ + أ _٢ س _٣ - أ _٢ س _٢	٣ - ٢ + ١٥ - ٨ = ١
أ _٣ س _٢	أ _٣ س _٢ - أ _٣ س _٣ + أ _٢ س _٢ - أ _٢ س _٣	١١ - ٢ + ٧ - ١٥ = ١
أ _٣ س _٤	أ _٣ س _٤ - أ _٣ س _١ + أ _٢ س _٤ - أ _٢ س _١	٥ - ٣ + ١٢ - ٧ = ٧

ومن هنا يتبين أن الجدول الثالث يمثل الحل الأمثل ، حيث أن قيمة صافي

التغير لجميع الخلايا الفارغة إما صفرية أو موجبة .

١. سنبدأ بالحل المبدئي بأي طريقة ، إما بطريقة الركن الأيمن العلوي

٢. نرّمز للصّف بالرمز (ص) وترتيب الصف بالرمز (م)، فنقول مثلاً
ص. أو الصف الثاني.

٣. نرمز للعمود بالرمز (ع) وترتيب العمود بالرمز (ن)، فنقول مثلاً ع.

أَوِ الْعَمُودِ الثَّانِي .

٤. نرسم للتكلفة في الخلية بالرمز ك_ن فمثلا ك_٢ تمثل التكلفة في

الصف الخامس العمود الثاني .

٥. بالنسبة للخانات أو الخلايا المشغولة يتم تطبيق المعادلة التالية :

صم + عن = عن

وبوضع ص_١ = صفر يمكن الحصول على باقي قيم ص ، ع ، أي ص_٢ ،

ص ۳ ، ۰۰۰ ، ۱۴ ، ۲۴ ، ۰۰۰

٦. مقياس التحسين وهو : ثمن - صم - عن ، أي التكلفة في

الخلية التي ترتيبها من الصف م ومن العمود ن - ترتيب الصف -

ترتيب العمود

٧. إذا وجدنا القيمة موجبة ، فهذا يعني أنه لا يمكن تخفيض تكاليف النقل

، أما إذا كانت القيمة سالبة فإنه يمكن التخفيض ثم يتم إكمال الحل

بإستخدام طريقة نقطة الارتكاز أو حجر الوطاء.

بحوث العمليات

(١) طريقة النقل

مثال (٢)

تمتلك إحدى الشركات ٣ مصانع أ ، ب ، ج ، وثلاث مناطق للتوزيع س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، وكانت المصانع تنتج وحدات متماثلة من منتج واحد وتبلغ الطاقة الإستيعابية لمناطق التوزيع كما يلي :

س_١ = ١٢٠٠ وحدة ، س_٢ = ٨٠٠ وحدة ، س_٣ = ١٠٠٠ وحدة ، وتبلغ طاقة كل مصنع وتكاليف النقل من كل مصنع إلى كل منطقة توزيع على النحو التالي :

المصنع	الطاقة	تكلفة نقل الوحدة
أ	٦٠٠ وحدة	إلى س _١ = ٥ جنيه
		إلى س _٢ = ٦ جنيه
		إلى س _٣ = ٨ جنيه
ب	١٠٠٠ وحدة	إلى س _١ = ٤ جنيه
		إلى س _٢ = ٧ جنيه
		إلى س _٣ = ٧ جنيه
ج	١٤٠٠ وحدة	إلى س _١ = ٦ جنيه
		إلى س _٢ = ٨ جنيه
		إلى س _٣ = ٦ جنيه

والمطلوب تحديد خطة النقل المثلى لإنتاج المصانع على مناطق التوزيع المختلفة بما يؤدي إلى تدنية تكاليف النقل ، مع إعداد جدول الحل المبدئي الممكن وفقاً لطريقتي ١- الركن الشمالي الشرقي ٢- طريقة أدنى تكلفة واختبر مثالية الحل وفقاً لطريقتي :

- ١- طريقة نقطة الارتكاز ٢- طريقة التوزيع المعتدل؟

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

أولاً : تصوير جدول النقل والحلول المبدئية :

مناطق مصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥	٦	٨	٦٠٠
أ٢	٤	٧	٧	١٠٠٠
أ٣	٦	٨	٦	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

ثانياً : الحل المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي :

المناطق المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥ ٦٠٠	٦	٨	٦٠٠
أ٢	٤ ٦٠٠	٧ ٤٠٠	٧	١٠٠٠
أ٣	٦	٨ ٤٠٠	٦ ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

ويكون الحل المبدئي ممكناً إذا كان عدد الخلايا المشغولة =

$$= \text{عدد المصادر (المصانع)} + \text{عدد مناطق التوزيع} - ١$$

$$= ٥ = ١ - ٣ + ٣ =$$

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

إجمالي تكلفة النقل =

$$\begin{aligned}
 & 6 \times 1000 + 8 \times 400 + 7 \times 400 + 4 \times 600 + 5 \times 600 = \\
 & 6000 + 3200 + 2800 + 2400 + 3000 = \\
 & 17400 \text{ جنيه} =
 \end{aligned}$$

(٢) الحل المبدئي بطريقة أدنى تكلفة في المصفوفة :

طاقة المصانع	س٣	س٢	س١	المناطق المصانع
٦٠٠	٨	٦	٥	أ١
		٤٠٠	٢٠٠	
١٠٠٠	٧	٧	٤	أ٢
			١٠٠٠	
١٤٠٠	٦	٨	٦	أ٣
	١٠٠٠	٤٠٠		
٣٠٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	١٢٠٠	طاقة المناطق

ويكون الحل المبدئي ممكناً إذا كان عدد الخلايا المشغولة =

$$= \text{عدد المصادر} + \text{عدد مناطق التوزيع} - ١$$

$$= ٥ = ١ - ٣ + ٣$$

وستكون التكلفة الإجمالية للنقل وفقاً للجدول المبدئي =

$$\begin{aligned}
 & 6 \times 1000 + 8 \times 400 + 4 \times 1000 + 6 \times 400 + 5 \times 200 = \\
 & 6000 + 3200 + 4000 + 2400 + 1000 = 16600 \text{ جنيه} =
 \end{aligned}$$

(٩) طريقة النقل

بحوث العمليات

ثانياً : اختبار مثالية الحل المبدئي :

١- باستخدام طريقة نقطة الإرتكاز (حجر الوطء)

يمكن تطبيق هذه الطريقة على جدول الحل المبدئي بطريقة الركن

الشمالي الشرقي ، حيث :

المناطق المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥ ٦٠٠	٦	٨	٦٠٠
أ٢	٤ ٦٠٠	٧ ٤٠٠	٧	١٠٠٠
أ٣	٦	٨ ٤٠٠	٦ ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

جدول لتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة
أ١ س٢	أ١ س٢ - أ١ س١ + أ٢ س١ - أ٢ س٢	٢ - ٥ - ٤ + ٧ - ٦
أ١ س٣	أ١ س٣ - أ١ س١ + أ٢ س١ - أ٢ س٢ + أ٣ س١ - أ٣ س٢	٢ - ٥ - ٤ + ٧ - ٨ + ٦ - ٨
أ٢ س٣	أ٢ س٣ - أ٢ س١ + أ٢ س٢ - أ٢ س٣ + أ٣ س١ - أ٣ س٢	٢ - ٧ - ٨ + ٦ - ٧
أ٣ س١	أ٣ س١ - أ٢ س١ + أ٢ س٢ - أ٢ س٣ + أ٣ س١ - أ٣ س٢	١ - ٤ - ٧ + ٨ - ٧

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

يتضح من تقييم الخلايا أن التغير في التكاليف إذا كان موجباً فإنه يؤدي إلى زيادة التكاليف ، أما إذا كان سالباً فإنه يؤدي إلى خفض التكاليف ، وبالنظر إلى الخلية أ_١ س_٢ نجد أنها الخلية الخالية الوحيدة التي يؤدي النقل إليها إلى تخفيض التكلفة الكلية للنقل بمقدار ٢ جنيه عن كل وحدة يتم نقلها إلى هذه الخلية ثم نرسم هذه الخلية على النحو التالي :

س _٢	س _١
٦	٥
×	٦٠٠
٧	٤
٤٠٠	٦٠٠

أ_١-

أ_٢+

أصغر قيمة يمكن نقلها هي ٤٠٠ ، فهي تضاف على الخلايا الموجبة وتطرح من الخلايا السالبة :

الكمية	الخلايا التي يشملها التعديل
٤٠٠	أ _١ س _٢
٤٠٠ - ٤٠٠ = صفر	أ _٢ س _٢ (-)
١٠٠٠ = ٤٠٠ + ٦٠٠	أ _٢ س _١ (+)
٢٠٠ = ٤٠٠ - ٦٠٠	أ _١ س _١ (-)

ومن هنا يمكن إعداد جدول النقل الجديد موضحاً به الكميات الجديدة

في كل خلية تأثرت بهذا التعديل ، أما الخلايا التي لم تتأثر بهذا التعديل تظل كما هي في جدول النقل السابق .

جدول النقل الثاني

المناطق المصانع	س ١	س ٢	س ٣	طاقة المصانع
أ	٥ ٢٠٠	٦ ٤٠٠	٨ ٦٠٠	
أ	٤ ١٠٠٠	٧	٧	١٠٠٠
أ	٦	٨ ٤٠٠	٦ ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

= التكلفة الكلية للنقل

$$٦ \times ١٠٠٠ + ٨ \times ٤٠٠ + ٤ \times ١٠٠٠ + ٦ \times ٤٠٠ + ٥ \times ٢٠٠ =$$

$$= ١٦٦٠٠ جنيه$$

ويلاحظ أن التكلفة الكلية للنقل قد انخفضت من ١٧٤٠٠ إلى ١٦٦٠٠ جنيه

جدول لتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار تخلية	صافي التغير في التكلفة
أ س ٣	أ س ٣ - أ س ٢ + أ س ٢ - أ س ١	٨ - ٦ + ٦ - ٤ = ٤
أ س ٢	أ س ٢ - أ س ١ + أ س ١ - أ س ٢	٧ - ٤ + ٤ - ٦ = ١
أ س ٢	أ س ٢ - أ س ٣ + أ س ٣ - أ س ١ + أ س ١ - أ س ٢	٧ - ٦ + ٦ - ٤ + ٤ - ٥ = ٢
أ س ١	أ س ١ - أ س ٢ + أ س ٢ - أ س ٣ + أ س ٣ - أ س ١	٦ - ٨ + ٨ - ٦ + ٦ - ٤ = ٢

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

يتضح من الجدول السابق أن الخلية المثالية هي الخلية أ_١س_١، يؤدي النقل إليها إلى تخفيض التكلفة الكلية للنقل بمقدار ١ جنيه عن كل وحدة يتم نقلها إلى هذه الخلية ثم نرسم هذه الخلية على النحو التالي :

س٢	س١
٦ ٤٠٠	٥ ٢٠٠
٨ ٤٠٠	٦

أ_١-

أ_١+

أصغر قيمة يمكن نقلها هي ٢٠٠ ، فهي تضاف على الخلايا الموجبة وتطرح من الخلايا السالبة :

الكمية	الخانات التي يشملها التعديل
٢٠٠	أ _١ س _١
$٦٠٠ = ٢٠٠ + ٤٠٠$	أ _١ س _٢ (+)
$٢٠٠ = ٢٠٠ - ٤٠٠$	أ _٢ س _١ (-)
صفر	أ _١ س _٢

ومن هنا يمكن إعداد جدول النقل الجديد موضحاً به الكميات الجديدة في كل خلية تأثرت بهذا التعديل ، أما الخلايا التي لم تتأثر بهذا التعديل تظل كما هي في جدول النقل السابق ، ويكون جدول النقل الثالث على النحو التالي .

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

جدول النقل الثالث

المناطق المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥	٦	٨	٦٠٠
أ٢	٤	٧	٧	١٠٠٠
أ٣	٦	٨	٦	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

التكلفة الكلية للنقل =

$$٦ \times ١٠٠٠ + ٨ \times ٢٠٠ + ٦ \times ٢٠٠ + ٤ \times ١٠٠٠ + ٦ \times ٦٠٠ =$$

$$= ١٦٤٠٠ \text{ جنيه}$$

جدول لتقييم الخلايا الفارغة في الجدول الثالث

الخلية الفارغة	مسار الخية	صافي التغير في التكلفة
أ١ س١	أ١ س١ - أ١ س٢ + أ٢ س١ - أ٢ س٢	١ - ٥ + ٦ - ٨ = ١
أ١ س٢	أ١ س١ - أ١ س٢ + أ٢ س٢ - أ٢ س٣	١ - ٤ + ٧ - ٨ = ٦
أ١ س٣	أ١ س١ - أ١ س٢ + أ٢ س٢ - أ٢ س٣	١ - ٥ + ٧ - ٨ = ٥
أ٢ س١	أ١ س١ - أ١ س٢ + أ٢ س٢ - أ٢ س٣	١ - ٤ + ٧ - ٨ = ٦
أ٢ س٢	أ١ س١ - أ١ س٢ + أ٢ س٢ - أ٢ س٣	١ - ٤ + ٧ - ٨ = ٦
أ٢ س٣	أ١ س١ - أ١ س٢ + أ٢ س٢ - أ٢ س٣	١ - ٤ + ٧ - ٨ = ٦

ومن هنا يتبين أن الجدول الثالث يمثل الحل الأمثل ، حيث أن قيمة صافي التغير لجميع الخلايا الفارغة موجبة : أي أن ملأ أي خلية من هذه الخلايا سيؤدي إلى زيادة التكاليف الكلية .

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

ويتلخص الحل الأمثل في :

١. يتم تخصيص طاقة المصنع أ، بالكامل (٦٠٠ وحدة) لمنطقة التوزيع س_١.
٢. يتم تخصيص طاقة المصنع أ، بالكامل (١٠٠٠ وحدة) لمنطقة التوزيع س_٢.
٣. يتم تخصيص طاقة المصنع أ، (١٤٠٠ وحدة) كما يلي :
 - ♦ لمنطقة التوزيع س_١ = ٢٠٠ وحدة
 - ♦ لمنطقة التوزيع س_٢ = ٢٠٠ وحدة
 - ♦ لمنطقة التوزيع س_٣ = ١٠٠٠ وحدة
٤. التكاليف الكلية للنقل = ١٦٤٠٠ جنيه

٢- اختبار مثالية الحل المبدئي باستخدام طريقة التوزيع المعدل

يمكن تطبيق هذه الطريقة على جدول الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي ، نجد ما يلي :

المناطق المصانع	س _١	س _٢	س _٣	طاقة المصانع
أ	٥ ٦٠٠	٦ ٦٠٠	٨ ٦٠٠	٦٠٠
ب	٤ ٦٠٠	٧ ٤٠٠	٧ ١٠٠٠	١٠٠٠
ج	٦ ٤٠٠	٨ ٤٠٠	٦ ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

إجمالي تكاليف النقل = ١٧٤٠٠ جنيه.

وحيث أن : ص_م + ع_ن = ك_من بالنسبة للخلايا المشغولة

(٩) طريقة النقل

بحوث العمليات

ص _١ + ع _١ = ٥	أي أن : ع _١ = ٥
صفر + ع _١ = ٥	
ص _٢ + ع _١ = ٤	
ص _٢ + ٥ = ٤	أي أن : ص _٢ = ١ -
ص _٢ + ع _٢ = ٧	
١ - + ع _٢ = ٧	أي أن : ع _٢ = ٨ =
ص _٢ + ع _٢ = ٨	
ص _٢ + ٨ = ٨	أي أن : ص _٢ = صفر
ص _٢ + ع _٢ = ٦	
صفر + ع _٢ = ٦	أي أن ع _٢ = ٦

والخطوة الثانية تطبيق مقياس أو تحسين التكاليف على الخلايا الخالية :

مقياس التحسين : كمن - صم - عن

الخلايا الخالية	كمن - صم - عن
أ _١ س _٢	٦ - صفر - ٨ = ٢ -
أ _١ س _٣	٨ - صفر - ٦ = ٢
أ _٢ س _٣	٧ - (١ -) - ٦ = ٢
أ _٣ س _١	٦ - صفر - ٥ = ١

ويتضح من تقييم الخلايا السابقة أن الخلية أ_١ س_٢ أنها الخلية الوحيدة التي يؤدي النقل إليها إلى تخفيض التكلفة الكلية للنقل بمقدار ٢ جنيه عن كل وحدة يتم نقلها إلى هذه الخلية ثم نرسم هذه الخلية على النحو التالي :

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

س٢	س١
٦٠٠	٥٠٠
٧٠٠	٤٠٠
٤٠٠	٦٠٠

أ١-

أ٢+

أصغر قيمة يمكن نقلها هي ٤٠٠ ، فتضاف على الخلايا الموجبة وتطرح من الخلايا السالبة كما يلي :

الخانات التي يشملها التعديل	تسمية
أ١ س١	$٢٠٠ = ٤٠٠ - ٦٠٠$
أ١ س٢	$٤٠٠ = ٤٠٠ + \text{صفر}$
أ٢ س٢	$\text{صفر} = ٤٠٠ - ٤٠٠$
أ٢ س١	$١٠٠٠ = ٤٠٠ + ٦٠٠$

جدول النقل الثاني

المناطق المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥٠٠ ٢٠٠	٦٠٠ ٤٠٠	٨٠٠	٦٠٠
أ٢	٤٠٠ ١٠٠٠	٧٠٠	٧٠٠	١٠٠٠
أ٣	٦٠٠	٨٠٠ ٤٠٠	٦٠٠ ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

التكلفة الكلية للنقل =

$$6 \times 1000 + 8 \times 400 + 4 \times 1000 + 6 \times 400 + 5 \times 200 =$$

$$= 16600 \text{ جنيه}$$

وهذا الحل ليس الحل الأمثل حيث مازال تقييم الخلايا الخالية سالبا، وعلى ذلك نكرر القواعد السابقة على الجدول السابق ، بافتراض أن ص_١ = صفر للخلايا المشغولة ، حيث :

$$\begin{array}{ll} \diamond & \text{ص}_1 + \text{ع}_1 = 5 \\ \diamond & \text{صفر} + \text{ع}_1 = 5 \quad \text{أي أن : ع}_1 = 5 \\ \diamond & \text{ص}_1 + \text{ع}_2 = 6 \\ \diamond & \text{صفر} + \text{ع}_2 = 6 \quad \text{أي أن : ع}_2 = 6 \\ \diamond & \text{ص}_2 + \text{ع}_1 = 4 \\ \diamond & \text{ص}_2 + \text{ع}_2 = 5 \quad \text{أي أن : ص}_2 = 1 \\ \diamond & \text{ص}_2 + \text{ع}_3 = 8 \\ \diamond & \text{ص}_3 + \text{ع}_2 = 8 \quad \text{أي أن : ص}_3 = 2 \\ \diamond & \text{ص}_3 + \text{ع}_4 = 6 \\ \diamond & \text{ص}_4 + \text{ع}_3 = 7 \quad \text{أي أن : ع}_4 = 4 \end{array}$$

والخطوة الثانية تطبيق مقياس أو تحسين التكاليف على الخلايا الخالية :

الخلايا الخالية	ك.م.ن - ص.م - ع.ن
أ _١ س _٣	٨ - صفر - ٤ = ٤
أ _٢ س _٢	٧ - (١-) - ٦ = ٢
أ _٢ س _٣	٧ - (١-) - ٤ = ٢
أ _٣ س _١	٦ - ٢ - ٥ = ١

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

ويتضح من تقييم الخلايا السابقة أن الخلية المثالية أ- س١ حيث يؤدي النقل إليها إلى تخفيض التكلفة الكلية للنقل بمقدار ١ جنيه عن كل وحدة يتم نقلها إلى هذه الخلية ثم نرسم هذه الخلية على النحو التالي :

س٢	س١
٦	٥
٤٠٠	٢٠٠
٨	٦
٤٠٠	

أ-١

أ-٢

أصغر كمية تضاف على الخلايا الموجبة وتطرح من الخلايا السالبة هي ٢٠٠

٢٠٠ = ٢٠٠ + صفر	أ- س١
٦٠٠ = ٢٠٠ + ٤٠٠	أ- س٢
٢٠٠ = ٢٠٠ - ٤٠٠	أ- س٢
٢٠٠ = ٢٠٠ - ٢٠٠ = صفر	أ- س١

جدول النقل الثالث

المناطق المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥	٦	٨	٦٠٠
أ٢	٤	٧	٧	١٠٠٠
أ٣	٦	٨	٦	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

التكلفة الكلية للنقل =

$$6 \times 1000 + 8 \times 200 + 6 \times 200 + 4 \times 1000 + 6 \times 600 =$$

$$16400 = \text{جنيه}$$

وهذا الحل ليس الحل الأمثل حيث مترال تقييم الخلايا الخالية سالبا، وعلى ذلك نكرر القواعد السابقة على الجدول السابق، حيث :

$$\begin{array}{ll} \diamond & \text{ص} + \text{ع} = 6 \\ \diamond & \text{صفر} + \text{ع} = 6 \quad \text{أي أن : ع} = 6 \\ \diamond & \text{ص} + \text{ع} = 8 \\ \diamond & \text{ص} + \text{ع} = 8 \quad \text{أي أن : ص} = 2 \\ \diamond & \text{ص} + \text{ع} = 6 \\ \diamond & \text{ص} + \text{ع} = 6 \quad \text{أي أن ع} = 4 \\ \diamond & \text{ص} + \text{ع} = 4 \\ \diamond & \text{ص} + \text{ع} = 4 \quad \text{أي أن ص} = \text{صفر} \\ \diamond & \text{ص} + \text{ع} = 6 \\ \diamond & \text{ص} + \text{ع} = 6 \quad \text{أي أن ع} = 4 \end{array}$$

والخطوة الثانية تطبيق مقياس أو تحسين التكاليف على الخلايا الخالية :

الخلايا الخالية	كم ن - ص م - ع
أ _١ س _١	٥ - صفر - ٤ = ١
أ _١ س _٣	٨ - صفر - ٤ = ٤
أ _٢ س _٢	٧ - صفر - ٦ = ١
أ _٢ س _٣	٧ - صفر - ٤ = ٣

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

يتضح من هذا التقييم أن جميع الخلايا ذات أثر موجب على التكلفة ، أي أن ملأ أي خلية من هذه الخلايا سيؤدي إلى زيادة التكاليف الكلية ، ويعتبر الجدول الثالث هو الحل الأمثل .

ويتلخص الحل الأمثل في :

- ١ . يتم تخصيص طاقة المصنع أ ، بالكامل (٦٠٠ وحدة) لمنطقة التوزيع س٢ .
- ٢ . يتم تخصيص طاقة المصنع أ٢ ، بالكامل (١٠٠٠ وحدة) لمنطقة التوزيع س١ .
- ٣ . يتم تخصيص طاقة المصنع أ٣ (١٤٠٠ وحدة) كما يلي :

♦ لمنطقة التوزيع س١ = ٢٠٠ وحدة

♦ لمنطقة التوزيع س٢ = ٢٠٠ وحدة

♦ لمنطقة التوزيع س٣ = ١٠٠٠ وحدة

٤ . التكاليف الكلية للنقل = ١٦٤٠٠ جنيه

وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام طريقة نقطة الارتكاز

أو حجر الوطاء .

تمارين على طريقة النقل

(١) أوجد الحل المبدئي والحل الأمثل للوصول لأقل تكلفة ممكنة :

من \ إلى	س١	س٢	س٣	العرض
أ١	٦	٨	١٠	١٥٠
أ٢	٧	١١	١١	١٧٥
أ٣	٤	٥	١٢	٢٧٥
الطلب	٢٠٠	١٠٠	٣٠٠	٦٠٠

(٢) باستخدام طريقة نقطة الارتكاز (حجر الوطاء) أوجد الحل المبدئي والحل الأمثل للتكلفة لنموذج النقل التالي :

من \ إلى	س١	س٢	س٣	س٤	العرض (الإنتاج)
أ١	١٢	٤	٩	٥	٥٥
أ٢	٨	١	٦	٦	٤٥
أ٣	١	١٢	٤	٧	٣٠
الطلب (الإستهلاك)	٤٠	٢٠	٥٠	٢٠	١٣٠

بحوث العمليات

(٩) طريقة النقل

٣) المطلوب إيجاد الحل المبدئي بأي طريقة تراها ومن ثم أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل للوصول لأقل تكلفة ممكنة :

من \ إلى	س١	س٢	س٣	العرض (الإنتاج)
أ١	٣	٣	٢	٢٥
أ٢	٤	٢	٣	٤٠
أ٣	٣	٢	٣	٣٠
الطلب (الإستهلاك)	٣٠	٣٠	٣٥	٩٥

٤) أوجد الحل المبدئي والحل الأمثل لتكاليف النقل باستخدام المعلومات الآتية:

♦ الإنتاج : $أ١ = ٤$ وحدات ، $أ٢ = ٦$ وحدات ، $أ٣ = ٣$ وحدات

♦ الإستهلاك : س١ = ٦ وحدات ، س٢ = ٥ وحدات ، س٣ = ٢ وحدة

♦ أسعار النقل :

$$أ١ س١ = ١٠ \quad أ١ س٢ = ٥ \quad أ١ س٣ = ١٥$$

$$أ٢ س١ = ١٢ \quad أ٢ س٢ = ٤ \quad أ٢ س٣ = ١٣$$

$$أ٣ س١ = ١٠ \quad أ٣ س٢ = ٥ \quad أ٣ س٣ = ١٥$$

٥) عند إعداد نموذج النقل ، ما هو الهدف الذي نسعى إلى تحقيقه من إعداد النموذج ؟ ما هو الفرق بين الحل المبدئي والحل الأمثل ؟ قارن بمثال رقمي من عندك بين طريقتي الشمال الشرقي وطريقة أدنى تكلفة للوصول للحل المبدئي، وشرح طريقة نقطة الإرتكاز للوصول للحل الأمثل ؟

مراجع الكتاب

أولاً : المراجع العربية

- ١- د. إبراهيم محمد مهدي ، وآخرون ، "الإحصاء التطبيقي وبحوث العمليات" ، ٢٠٠١ ، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة.
- ٢- د. عادل عبد الحميد عز ، أساليب التحليل الكمي ، مكتبة دار النهضة العربية ، ١٩٩٧م
- ٣- د. هالة عبد الله الخولي "بحوث العمليات في المحاسبة" ، ٢٠٠١م ، كلية التجارة ، جامعة القاهرة ١٩٩٩م.
- ٤- د. محمد عبد العال النعيمي وآخرون ، "بحوث العمليات" ١٩٩٩م ، دار وائل للنشر ، عمان ، الأردن .
- ٥- د. علي العلوانه ، وآخرون ، "بحوث عمليات" دار المستقبل للنشر والتوزيع ، الأردن
- ٦- د. أحمد سرور محمد ، "بحوث العمليات" ١٩٩٧ ، مكتبة عين شمس ، القاهرة .
- ٧- د. جلال إبراهيم العبد "الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية" دار الجامعة الجديدة للنشر ، الإسكندرية ٢٠٠٤م.
- ٨- د. حسن علي مشرفي ، "بحوث العمليات" ، دار المسيرة للنشر والتوزيع ، ، عمان ، الأردن ، ١٩٩٧م.
- ٩- د. محمد أسعد عبد الوهاب ، "مقدمة في بحوث العمليات" ، مكتبة ومطبعة الإشعاع ، الإسكندرية ، الطبعة الثالثة ، ١٩٩٨م.
- ١٠- د. سلطان محمد عبد الحميد وآخرون ، "مقدمة في بحوث العمليات، مكتبة الجلاء الجديدة ، ٢٠٠١-٢٠٠٢م .
- ١١- د. حمدي طه ، مقدمة في بحوث العمليات ، دار المريخ للنشر
- ١٢- د. سمير محمد عبد العزيز ن الإقتصاد الإداري ، مؤسسة شباب الجامعات ، ١٩٩١م
- ١٣- د. صلاح وهيب ، دراسة الجدوى ، مكتبة عين شمس .
- ١٤- د. عادل طه فايد ، دراسة الجدوى ، مكتبة عين شمس ، ١٩٩٩م .
- ١٥- د. رشاد الحملوي وآخرين ، إدارة العمليات ، مكتبة عين شمس ، ١٩٩٩م

بحوث العمليات

مراجع الكتاب

- ١٦- د. عبد المنعم فليج وآخرون : 'بحوث العمليات في المحاسبة ' ، دار الثقافة العربية ، القاهرة ، ١٩٩٠ م.
- ١٧- د. دلال صادق بطرس : 'بحوث العمليات في المحاسبة ' ، دار الثقافة العربية ، ١٩٩٣ م.
- ١٨- د. أحمد عبد المالك محمد وآخرون : 'بحوث العمليات في المحاسبة ' ، كلية التجارة ، جامعة الإسكندرية ، ٢٠٠٤ م.
- ١٩- د. نبيل عبد العظيم حسين ، 'بحوث العمليات ' ، الجزء الأول ، ١٩٩٦

ثانياً : المراجع الأجنبية

- (1) HILLER , F. S. , and LIEBERMAN , G. J. , **Introduction To Operation Research** , Mc.Graw Hill International Editions , 1990.
- (2) ECKER , J. G. and KUPFERSCHMID , **Introduction To Operation Research** , John-Wiley & Sons , New York , 1988 .
- (3) GUPTA , S. and COZZOLINO , J. M. , **Fundamentals of Operation Research for Management** , Holden – Day , Inc. , 1974 .
- (4) FOGIEL , M. , **The Operations Research Problem Solver** , New Jersey , 1989.
- (5) KOTHARI , C. R. , **An Introduction To Operational Research** , VILAS , Publishing House POTLTD , New Delhi , 1982 .
- (6) TAHA , H. A. , **Operations Research** , 2nd ed. , Macmillan Publishing , 2000.
- (7) WAGNER , H. M. , **Principles of Operations Research** , Prentice Hall of India , New Delhi , 1982 .
- (8) WILKES , F. M. , **Elements of Operational Research** , Mc.Graw Hill International Editions , 1987.
- (9) WILSON , C. **Operational Research for Students of Management** , The Pitman Press , London , 1973 .

المعمل التجاري للطباعة والتصوير
كلية التجارة – جامعة المنصورة
ت: ٥٠٢٢٦٥٢٧٢

رقم الإيداع بدار الكتب
١٥٥٨١ / ٢٠٠٦ م
حقوق الطبع محفوظة للمؤلف